WAT wewn. 1985/91

Karol Jach

MODELOWANIE KOMPUTEROWE ZJAWISK KUMULACYJNYCH

WARSZAWA 1990

Karol Jach

MODELOWANIE KOMPUTEROWE ZJAWISK KUMULACYJNYCH



WARSZAWA 1990



WAT WKP/GIT-V-192. Zam. nr 38/H/90. Nakład 65 egz.

SPIS TREŚCI

WSTĘP 5

Rozdział 1. ZJAWISKO KUMULACJI 13

1.1. Klasyczna teoria Ławrientjewa - Birkhoffa oceny parametrów strumienia kumulacyjnego 14
1.2. Aktualny stan badań w ramach klasycznej teorii kumulacji 23
1.3. Idea "kumulacji odwrotnej" 28
1.4. Informacje literaturowe dotyczące modelowania komputerowego zjawisk kumulacyjnych 31
1.5. Cel pracy... 38

Rozdział 2. MATEMATYCZNO - FIZYCZNE SFORMUŁOWANIE PROBLEMU 40

2.1. Opis procesu detonacji materiałów wybuchowych 41
2.2. Teoria sprężysto/lepko - plastyczności w zastosowaniu do modelowania detonacji i napędzania metalowych wkładek kumulacyjnych 44
2.3. Model tworzenia się i wzrostu szczelin w deformowanych wkładkach kumulacyjnych 52
2.4. Warunki początkowo - brzegowe 56

Rozdział 3. STRUKTURA I PODSTAWOWE ELEMENTY KODU NUMERYCZNEGO DO ANALIZY SPRZĘŻONYCH PROCESÓW DETONACJI, DEFORMACJI I NAPĘDZANIA CIAŁ 58

3.1. Idea proponowanej metody numerycznej 58
3.2. Wybór punktów sąsiednich 64
3.3. Niestabilności zbliżeniowe i kątowe 68

3.4. Aproksymacja numeryczna warunków początkowo - brzegowych 72
3.5. Metoda obliczeń efektów lepko - plastycznych 82
3.6. Modelowanie wzrostu objętości szczelin 86
3.7. Analiza stabilności schematu różnicowego, dobór kroków przestrzennych i czasowych, zewnętrznej dyfuzji numerycznej i pseudolepkości 91
3.8. Organizacja procesu obliczeniowego 103

Rozdział 4. PRZYKŁADOWE WYNIKI SYMULACJI KOMPUTEROWYCH 110

4.1. "Kumulacja odwrotna" 110
4.2. Proces tworzenia się klasycznego strumienia kumulacyjnego 133
4.3. Przebicie osłony ciałem odkształcalnym 156

Rozdział 5. WNIOSKI 163

LITERATURA 169

WSTĘP

W drugiej połowie XIX wieku amerykański fizyk R.Wood odkrył ciekawe zjawisko lokalnej kumulacji energii materiału wybuchowego działającego na wklęsłą metalową powłokę. W przeprowadzonej serii eksperymentów pokazał on, że jeśli powłokę tę obciążyć symetrycznie ciśnieniem gazowych produktów detonacji, to z jej centralnych obszarów generuje się strumień metalu o bardzo dużej prędkości. Strumień ten może przebijać nawet metalowe przegrody. Energia kinetyczna cząstek strumienia liczona na jednostkę masy może nawet o rząd wielkości przewyższać właściwą energię wewnętrzną materiału wybuchowego.

Od tamtych czasów przyjęto nazywać to zjawisko, zjawiskiem kumulacyjnym, lub po prostu kumulacją, choć zakres pojęciowy tego słowa jest oczywiście znacznie szerszy. W pracy niniejszej używając terminu "zjawisko kumulacyjne" będę miał na uwadze jego historycznie ukształtowane znaczenie, zawężone do zjawisk powstających przy oddziaływaniu materiałów wybuchowych na metalowe powłoki. W pracach [1,2] w zakres terminu "kumulacja" włączono również tworzenie się gazowych strumieni produktów detonacji w wydrążeniach materiałów wybuchowych nie pokrytych metalicznymi powłokami. Z punktu widzenia możliwości prezentowanej w pracy metody obliczeniowej, zagadnienie to można potraktować jako podproblem ogólnego problemu kumulacji [3].

Koncepcje praktycznego wykorzystania efektu kumulacyjnego w pociskach przeciwpancernych pojawiły się w Niemczech w czasie I wojny światowej. Pierwszy patent na tego typu konstrukcję zgłoszono już w 1914 roku. Jednakże do szerszego, praktycznego wykorzystania zjawiska kumulacji doszło dopiero w czasie II wojny światowej. Duża skuteczność broni przeciwpancernej, wykorzystującej efekt kumulacyjny, skłoniła wiele krajów do rozpoczęcia intensywnych prac eksperymentalnych i teoretycznych mających na celu zwiększenie głębokości przebicia konkretnych

układów i poznanie fizyki zjawiska. Pierwsza jawna publikacja na ten temat ukazała się w 1948 roku, a jej autorami byli G. Birkhoff, M. MacDougall, E. Pugt i G. Taylor [4].

Dorobek doświadczalno-teoretyczny prowadzonych badań, na który oprócz wymienionych publikacji złożyły się również prace [5÷12], doprowadził do powstania tzw. hydrodynamicznej teorii kumulacji.

Proces generacji strumienia kumulacyjnego z wewnętrznej warstwy ściskanej wybuchowo stożkowej powłoki metalowej (zwanej dalej wkładką kumulacyjną), opisuje się w ramach tej teorii modelem zderzających się pod odpowiednim kątem warstw cieczy nieściśliwej. Parametry strumienia szacuje się z danego rozkładu prędkości masowej wzdłuż ramion wkładki lub wyliczając go na podstawie przybliżonych ocen oddziaływania materiału wybuchowego na wkładkę [2]. Teoria ta, którą najczęściej łączy się z nazwiskami Ławrientjewa i Birkhoffa, jest tzw. teorią pierwszego przybliżenia. Wyjaśniła ona podstawowy mechanizm tworzenia się strumienia kumulacyjnego i w tych warunkach, w których spełnione są jej założenia, znalazła szereg eksperymentalnych potwierdzeń.

Jednakże, już w początkowym okresie badań pojawiły się efekty niemożliwe do wytłumaczenia w ramach takiego podejścia. Sam Ławrientjew w swojej fundamentalnej pracy z 1957 roku [1], podsumowując wyniki osiągnięte na bazie teorii hydrodynamicznej, stwierdził: "Jednakże, już teraz nagromadziła się dostateczna liczba faktów nie mieszczących sie w teorii i wymagających dla swego wyjaśnienia istotnych jej uzupełnień". Zjawiska, których teoria ta wytłumaczyć nie mogła, to przede wszystkim:

- istnienie krytycznego kąta rozwarcia stożkowej wkładki kumulacyjnej, poniżej którego nie powstaje strumień kumulacyjny;
- przemieszczanie się i zmiana parametrów strumienia kumulacyjnego w czasie;

- niestacjonarne efekty towarzyszące napędzaniu wkładki i początkowym fazom procesu powstawania strumienia, itp.

Dalsze prace nad teorią zjawiska kumulacji stawiają sobie z reguły za cel wyjaśnienie tych efektów i od połowy lat 70-tych można podzielić je na dwa dość istotnie różniące się kierunki.

Do pierwszego można zaliczyć prace [13÷23]. Autorzy tych prac bazując dalej na założeniu o stacjonarności i nieograniczoności przepływu, starają się uwzględnić dodatkowe elementy takie jak: ściśliwość ośrodka, lepkość, podstawowe charakterystyki wytrzymałościowe wkładki, itp.

W zakresie drugiego kierunku, autorzy prac [24÷36] wykorzystując doświadczenia tzw. fizyki komputerowej, zmierzają w stronę kompleksowego rozwiązania problemu, bazując na równaniach mechaniki ciała stałego i uwzględniając realne warunki początkowo-brzegowe, oraz właściwości materiałowe metalowych wkładek.

Prace związane z pierwszym kierunkiem, z reguły zawierają analityczne formuły wygodne do stosowania w praktyce i umożliwiające przeprowadzanie prostych analiz wpływu niektórych czynników na proces kumulacji (np. ściśliwość ośrodka). Jednakże, daleko idące założenia upraszczające, leżące u podstaw tego typu rozważań, dają bardzo ograniczone możliwości wykorzystania tych wyników w praktyce.

W drugiej grupie prac, badacze starają się z kolei zminimalizować ilość upraszczających założeń i maksymalnie zbliżyć model matematyczno-fizyczny do realiów eksperymentalnych. Jednakże, informacje literaturowe odnoszące się do tego typu prac nie zawierają niestety, zbiorczych, uogólnionych wniosków, które mogłyby być pomocne przy badaniach konkretnych układów. Prace te zawierają z reguły przykładowe, ilustracyjne wyniki i wskazują w zasadzie tylko na możliwości określonych algorytmów, pozostających w gestii autorów.

Po drugie, wielość możliwych kształtów i wymiarów wkładek, rodzajów stosowanych materiałów wybuchowych i rozwiązań konstrukcyjno-technologicznych praktycznie eliminuje możliwość sformułowania dostatecznie ogólnych wniosków z podawanych w literaturze informacji.

W tej sytuacji, aby wykorzystać możliwości jakie daje modelowanie komputerowe, należy dysponować własnym kodem numerycznym, który mógłby być na bieżąco wykorzystywany przy analizie konkretnych problemów. Praca niniejsza poświęcona jest właśnie opracowaniu i przedstawieniu możliwości takiego oryginalnego kodu numerycznego, umożliwiającego uzyskanie kompleksowych rozwiązań problemów z zakresu teorii kumulacji. Kompleksowość rozwiązania oznacza, iż uwzględnia ono niestacjonarność i dwuwymiarowość zjawiska, odpowiadające realiom eksperymentalnym warunki początkowo-brzegowe i bazuje na półempirycznym opisie własności materiałów. Czasy obliczeń i obszary zajmowanej pamięci są realne w stosunku do aktualnych możliwości elektronicznych maszyn cyfrowych (EMC) znajdujących się w kraju. Przykłady prezentowane w pracy zajmują obszar pamięci rzędu 0.7÷1.5 MB, a czasy ich obliczeń wahają się w granicach 5÷20 godzin na EMC R-60.

W tym miejscu może zrodzić się pytanie, czy użycie tak skomplikowanego modelu fizyczno-matematyczno-numerycznego było nieodzowne przy modelowaniu zjawisk kumulacyjnych ? Okazało się, że jeśli od wyników tego typu pracy oczekuje się zgodności z eksperymentem, dla wszystkich mierzalnych parametrów, w zakresie od kilku do kilkunastu procent, to użycie takiego modelu jest koniecznością.

W pracach własnych [3, 28] pokazano, że jakościowy charakter zjawisk kumulacyjnych oddaje już prosty, hydrodynamiczny model ośrodka, traktujący wkładkę kumulacyjną jako tzw."ciecz sprężystą". Rezultaty znacznie lepsze osiągnięto zastępując ten model, modelem ciała sprężysto-plastycznego. Jednakże i w tym przypadku charakterystyki ilościowe zjawisk nie były zadowalające. Dopiero zbudowanie

modelu opartego na teorii sprężysto/lepko-plastyczności z uwzględnieniem efektów powstawania szczelin pozwoliło osiągnąć zamierzony cel, a więc zgodność wyników teoretycznych z eksperymentalnymi w granicach od kilku do kilkunastu procent. Uwagi te dotyczą przede wszystkim zjawiska, tzw. "odwrotnej kumulacji", które będzie omówione bardziej szczegółowo w rozdziale 1. W tym miejscu można jedynie nadmienić, że zjawisko to polega na formowaniu pocisków z metalowych wkładek stożkowych o dużych kątach rozwarcia (od 120 do 160 stopni) lub sferycznych o dużym promieniu krzywizny [27,37÷39]. Zjawiskiem tym zainteresowano się stosunkowo niedawno i jest ono w chwili obecnej intensywnie badane ze względu na swe szerokie możliwości zastosowań, zwłaszcza wojskowych [39].

Teoria hydrodynamiczna nie nadaje się w zasadzie do ilościowych analiz tego zjawiska, ponieważ w tym przypadku nie zachodzi przejście metalu w fazę zbliżoną do ciekłej. Wkładka kumulacyjna pozostając ciałem stałym jest tylko silnie nagrzana i plastycznie zdeformowana oraz zdefektowana. Na fakt znacznego wpływu efektów sprężysto-lepko-plastycznych na przebieg tego typu zjawiska zwrócono sygnalnie uwagę już w pracach [40,41].

Tak samo istotne znaczenie dla uzyskania odpowiedniej zgodności ilościowej wyników teoretycznych i eksperymentalnych ma zjawisko tworzenia się szczelin w ciałach poddanych dynamicznym obciążeniom. Na zjawisko to, oraz możliwości jego modelowania w ramach teorii ośrodka ciągłego zwraca się ostatnio coraz więcej uwagi [42÷46]. W chwili obecnej panuje jednak w tej dyscyplinie duża rozbieżność poglądów i należy ją uznać za praktycznie całkowicie otwartą dla dalszych badań.

Konieczność stosowania bardzo złożonego opisu matematyczno-fizycznego przy próbach osiągnięcia ilościowej zgodności wyników teoretycznych z eksperymentalnymi jest jedną z podstawowych przyczyn tego, że do tej pory ukazało się stosunkowo niewiele prac dotyczących komputerowego modelowania zjawisk kumulacyjnych [24÷27, 29÷31, 33÷36].

Drugim zasadniczym powodem takiego stanu rzeczy, są znane trudności natury numerycznej, związane z budową odpowiedniego algorytmu, który dawałby możliwość rozwiązywania sprzężonych, dwuwymiarowych problemów mechaniki ciał stałych i gazów w warunkach skrajnie dużych deformacji. Te wielopłaszczyznowe wymagania powodują, że w dziedzinie tej nie można również wskazać na jakiś jeden "optymalny" algorytm. Praktycznie każda z wymienionych prac ma mniej lub bardziej oryginalny charakter i może być traktowana również jako próba poszukiwania takiego "optymalnego" algorytmu. Wydaje się, że w chwili obecnej najbardziej zaawansowane wyniki osiągnięto na bazie kodu noszącego nazwę HEMP i jego późniejszych modyfikacjach [26,27]. Cechą wspólną wymienionych wyżej algorytmów jest to, że wykorzystują one do budowy sieci numerycznych współrzędne Lagrange'a lub Eulera, a najczęściej różne modyfikacje mieszanych współrzędnych Lagrange'a i Eulera. Sieci te dzielą rozważany obiekt na komórki, w których przeprowadza się odpowiednie bilanse masy, pędu i energii.

Metoda opracowana i omówiona w niniejszej pracy ma zasadniczo inne właściwości. Podstawową, pryncypialną cechą odróżniającą ją od metod wyżej wymienionych jest to, że nie tworzy się w niej klasycznej sieci numerycznej. W metodzie tej operuje się jedynie parametrami i torami wybranych na początku, w odpowiedni sposób punktów materialnych. Ruch i zmiany w czasie parametrów tych punktów wynikają z równań problemu, a gradienty pól w jakich się one poruszają wynikają z parametrów punktów sąsiednich, względem punktu rozważanego. Algorytm taki wykazuje więc większe podobieństwa do metody bicharakterystyk [47,48] lub do tzw. "metody punktów swobodnych" [49,50], niż do algorytmów dotychczas stosowanych w badaniach zjawisk kumulacyjnych. Na wybór tego typu algorytmu wpłynęły nie tylko osobiste doświadczenia autora w dziedzinie komputerowego modelowania zjawisk z zakresu mechaniki ośrodków ciągłych

[48, 51÷54], ale także analiza możliwości, ograniczeń, zakresu zastosowań, stopnia złożoności, itp. różnych metod, począwszy od fundamentalnych algorytmów z początku lat 60-tych [55÷70].

Ostateczną decyzję odnośnie budowy tego typu algorytmu do kompleksowego modelowania zjawisk kumulacyjnych podjęto jednak dopiero po uzyskaniu pierwszych pozytywnych rezultatów, przedstawionych w pracy [3].

Obecna faza badań i uzyskane wyniki upoważniają do stwierdzenia, że oprócz modelowania zjawisk kumulacyjnych, kod ten po odpowiednich adaptacjach, może być wykorzystany także do badania takich efektów, jak: przebicie osłon (odpowiedni przykład zostanie przedstawiony w rozdziale 4), napędzanie i stabilność koncentrycznych linerów, generacja fal Macha w układach stożkowych i walcowych [71,72], itp., a być może także do badania problemów wybuchowego łączenia metali.

Na zakończenie tego rozdziału należy jeszcze podkreślić, że w Polsce badania problemów kumulacji mają również wieloletnią tradycję i prowadzone były między innymi przez W. Babula i S. Ziębę [73], D. Smoleńskiego i H. Nowaka [74], E. Włodarczyka i A. Wiśniewskiego [75,76], H. Derentowicza i Z. Ziółkowskiego [38] oraz Z. Jopka [39]. Prace te koncentrowały się głównie na określonych, eksperymentalnych aspektach problemu, a w dziedzinie teorii bazowały na wynikach teorii hydrodynamicznej.

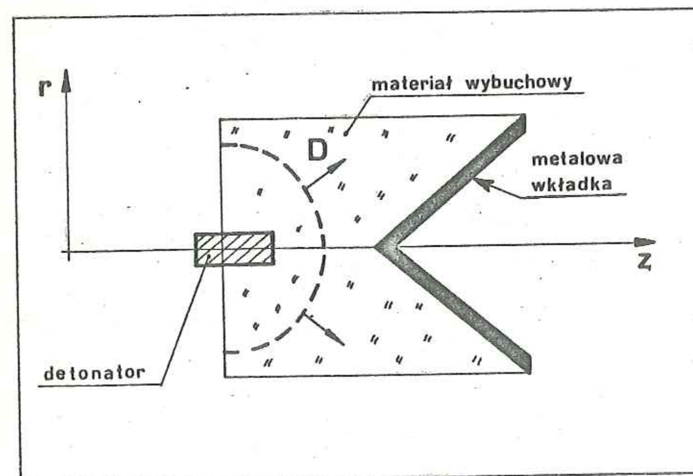
Układ niniejszej pracy jest następujący. Po krótkim wstępie wprowadzającym w problematykę pracy, w rozdziale 1 omówione zostaną zasadnicze elementy hydrodynamicznej teorii kumulacji i jej późniejsze uzupełnienia. Następnie, na bazie dostępnych informacji, krótko omówione zostaną kody numeryczne stosowane w badaniach zjawisk kumulacyjnych. W oparciu o te informacje, na zakończenie rozdziału, sformułowany zostanie cel niniejszej pracy. W rozdziale 2 przedstawiony zostanie układ równań problemu stanowiący matematyczno fizyczny model zjawska kumulacji. W rozdziale 3 zostaną omówione zasadnicze elementy kodu numerycznego służącego do rozwiązywania układu równań

przedstawionego w rozdziale 2. Rozdział 4 zawiera przykładowe rozwiązania problemów kumulacji klasycznej i "odwrotnej" oraz porównanie tych wyników z wynikami eksperymentu i teorii hydrodynamicznej. Na zakończenie tego rozdziału zaprezentowany zostanie przykład modelowania przebicia osłony ciałem odkształcalnym, uzasadniający sformułowaną wcześniej tezę o znacznie szerszych możliwościach zastosowań tego kodu, nie ograniczonych tylko do zjawisk kumulacyjnych. Pracę zakończono wnioskami zamieszczonymi w rozdziale 5 oraz wykazem cytowanej literatury.

Rozdział 1

ZJAWISKO KUMULACJI

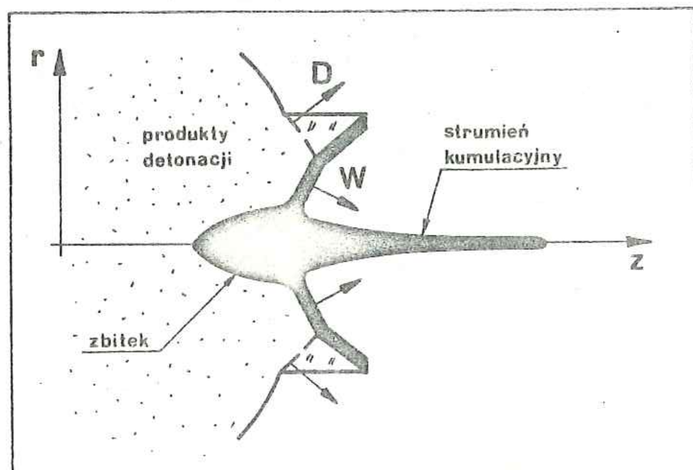
Rozważmy na wstępie prosty, ideowy schemat klasycznego ładunku kumulacyjnego. Zbudowany jest on z metalowej, stożkowej wkładki osadzonej w materiale wybuchowym, tak jak to przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Ideowy schemat klasycznego ładunku kumulacyjnego.

W momencie zadziałania detonatora w materiale wybuchowym zaczyna się propagować fala detonacyjna (czoło tej fali zaznaczono symbolicznie linią przerywaną na rys. 1). Fala detonacyjna po określonym czasie dociera do wkładki i przemieszcza się wzdłuż jej powierzchni. Za falą detonacyjną ciśnienie produktów detonacji stopniowo deformuje i napędza wkładkę. W wyniku napędzania elementy wkładki uzyskują prędkość o składowych radialnej i osiowej. Składowa radialna (skierowana w kierunku osi symetrii) powoduje gromadzenie się materiału wkładki wokół osi i lokalny, silny wzrost ciśnienia w tym

obszarze. Ciśnienie to wywołuje rozpływ zgromadzonego przy osi materiału wkładki na dwie części, których masy i prędkości zależą od parametrów układu kumulacyjnego.
Pierwszą z nich nazywa się popularnie "zbitkiem" (po rosyjsku "пест"). Zawiera ona większą masę i porusza się ze stosunkowo niewielką prędkością poosiową (rzędu ułamków km/s). Druga część, złożona z materiału tworzącego wewnętrzną powierzchnię wkładki, stanowi strumień kumulacyjny, którego czoło może osiągać prędkość poosiową do kilkunastu km/s. Schematycznie przedstawiono to zjawisko na rys.2.

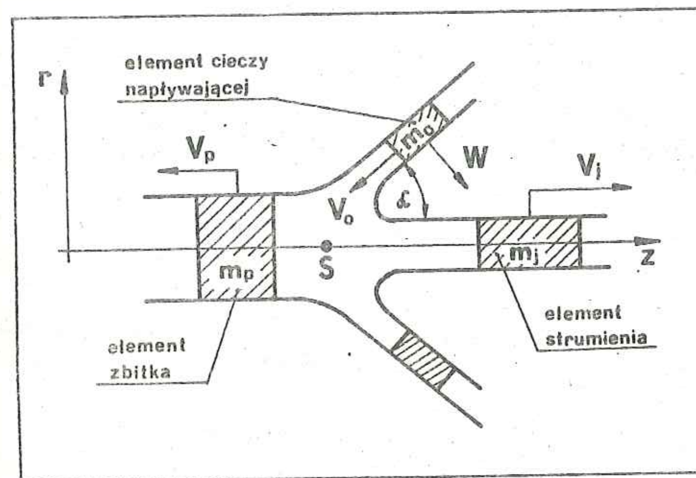


Rys.2. Ideowe przedstawienie zjawiska tworzenia się strumienia kumulacyjnego. D - prędkość frontu fali detonacyjnej, W - prędkość napędzonych elementów wkładki.

1.1. Klasyczna teoria Ławrientjewa-Birkhoffa oceny parametrów strumienia kumulacyjnego.

Jak już wspomniano we wstępie, twórcami pierwszego modelu opisującego zjawisko kumulacji byli niezależnie: Ławrientjew

[1] oraz Birkhoff, MacDougal, Pugt i Taylor [4]. Teorię tę nazywa się najczęściej klasyczną lub hydrodynamiczną. Zakłada się w niej, że wkładka kumulacyjna tworzy warstwę nieściśliwej cieczy idealnej napędzonej pod odpowiednim kątem do osi układu. Warstwa ta rozpływa się w otoczeniu osi na dwie części odpowiadające zbitkowi i strumieniowi kumulacyjnemu. Sytuację tę zilustrowano na rys.3.



Rys.3. Schemat rozpływu masy wkładki na strumień i zbitek.

Oznaczenia na rys.3 są następujące:

W - prędkość ramion wkładki w układzie laboratoryjnym (nieruchomym),

S - punkt rozdziału masy wkładki na strumień i zbitek,

v_o, v_p, v_j - prędkość napływu masy wkładki, prędkość zbitka i strumienia w układzie współrzędnych związanych z punktem S,

m_o, m_p, m_j - masy elementów odpowiednio: napływających, zbitka i strumienia,

α - połówkowy kąt rozwarcia wkładki.

Nie wnikając szczegółowo w problemy samego rozpływu cieczy [77,78], można dokonać asymptotycznego bilansu masy, pędu i energii dla elementu cieczy, który początkowo poruszał się z prędkością v_0 pod kątem α do osi i miał masę m_0, a następnie rozpłynął się na dwa elementy o masach m_p i m_j oraz prędkościach v_p i v_j.
Odpowiednie prawa zachowania w układzie związanym z punktem S (rys.3) mają postać:

$$m_j + m_p = m_o \tag{1.1}$$

$$m_j v_j + m_p v_p = -|\vec{v}_o| \cos\alpha \, m_o \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{2} m_j v_j^2 + \frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{1}{2} m_o v_o^2 \tag{1.3}$$

Niewiadomymi w tym układzie równań są m_p, m_j, v_p i v_j.
Aby znaleźć czwartą, brakującą zależność, dla jednoznacznego określenia tych niewiadomych, można podobnie jak w pracach [1] i [4] wykorzystać równanie Bernouliego.
Dla linii prądu, która przechodzi przez zbitek, mamy:

$$p_p + \frac{1}{2} \varrho_o v_p^2 = c_p \tag{1.4}$$

a dla linii prądu, która przechodzi przez strumień jest:

$$p_j + \frac{1}{2} \varrho_o v_j^2 = c_j \tag{1.5}$$

gdzie wielkości p_p i p_j oznaczają ciśnienia w elementach zbitka i strumienia, a c_p i c_j są chwilowo dowolnymi stałymi.
Zakładając, że elementy cieczy w niezaburzonej części wkładki są w tym samym stanie, mamy $c_p = c_j$. Jeśli przyjąć dalej, że po rozdzieleniu się cieczy na zbitek i strumień, ciśnienia w nich wyrównują się, tzn. $p_p = p_j$, to z równań (1.4) i (1.5) wynika, że:

$$v_p^2 = v_j^2 \tag{1.6}$$

Uwzględniając dalej fakt, że rozważania prowadzimy w ruchomym układzie współrzędnych, związanych z punktem S, mamy ostatecznie:

$$v_p = -v_j \; ; \quad v_j > 0 \; ; \quad v_p < 0 \tag{1.7}$$

Układ równań (1.1), (1.2), (1.3) i (1.7) pozwala wyznaczyć wszystkie poszukiwane wielkości:

$$v_j = |\vec{v}_o| \tag{1.8}$$

$$v_p = -|\vec{v}_o| \tag{1.9}$$

$$m_j = m_o \sin^2 \frac{\alpha}{2} \tag{1.10}$$

$$m_p = m_o \cos^2 \frac{\alpha}{2} \, . \tag{1.11}$$

Często wygodniej jest korzystać z tych wyników przetransformowanych do układu laboratoryjnego (nieruchomego). Jeśli w układzie tym wkładka porusza się z prędkością $\vec{W}$ normalną do swej powierzchni, to punkt rozdzielenia strumieni porusza się wzdłuż osi z prędkością V_s:

$$V_s = \frac{|\vec{W}|}{\sin\alpha} \tag{1.12}$$

Prędkości $|\vec{v}_o|$ i $|\vec{W}|$ związane są relacją:

$$|\vec{W}| = |\vec{v}_o| \, tg\,\alpha \tag{1.13}$$

Stąd prędkości strumienia V_j i zbitka V_p w nieruchomym układzie współrzędnych odpowiednio wynoszą:

$$V_j = |\vec{W}| \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{1.14}$$

$$V_p = |\vec{W}| \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{1.15}$$

W tym miejscu należy jeszcze raz podkreślić, że przedstawione formuły wynikają z prostych, asymptotycznych bilansów masy, pędu i energii, zastosowanych do nieograniczonego, stacjonarnego przepływu nieściśliwej cieczy idealnej, przy dodatkowych założeniach upraszczających (stałość parametrów w poszczególnych częściach wkładki). Pomimo tych uproszczeń, teoria ta znalazła szereg potwierdzeń eksperymentalnych (w określonych zakresach parametrów wkładek) i do dziś jest stosowana, jako tzw. teoria pierwszego przybliżenia. Wzory (1.8), (1.9), (1.10), (1.11) pozwalają ocenić parametry zbitka i strumienia pod warunkiem, że wkładka o stałej grubości została napędzona do stałej prędkości pod stałym kątem do osi.

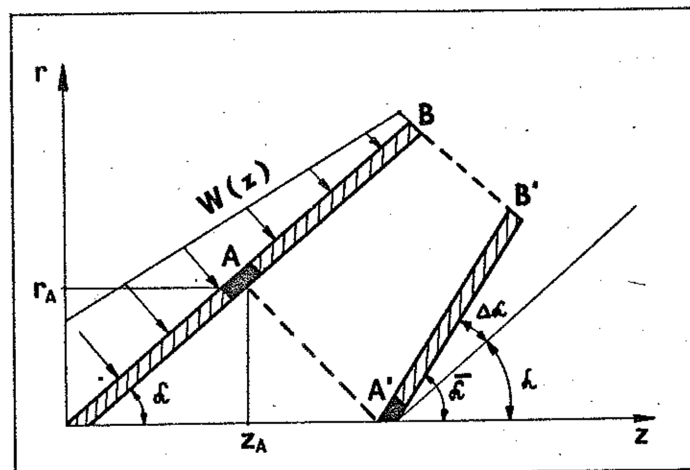
W praktyce sytuacja taka najczęściej nie występuje i aby teorię tę zastosować do wkładek o zmiennych parametrach należy poczynić dalsze założenia upraszczające. Z reguły przyjmuje się, że wkładkę można podzielić na nieoddziaływujące ze sobą elementy i do każdego z nich z osobna stosować wzory od (1.8) do (1.11) [2,18]. W tej sytuacji w zależności od posiadanych informacji lub założeń odnośnie parametrów wkładki możemy zbudować całą gamę różnych szczegółowych modeli. Rozpatrzmy bardziej szczegółowo jeden z nich, który w dalszej części pracy będzie można skonfrontować z rozwiązaniem numerycznym.

Załóżmy zatem, że w chwili początkowej wkładka kumulacyjna o stałej grubości jest nachylona do osi pod kątem α, a prędkość masowa jej elementów ma liniowy rozkład wzdłuż jej ramion. Sytuację tę zilustrowano na rys. 4.
Załóżmy, że rozkład prędkości $W(z)$ określony jest wzorem:

$$W(z) = W_0(1 - mz) \tag{1.16}$$

Współczynniki W_0 i m trzeba określić z eksperymentu lub, tak jak to zostanie zrobione w dalszej części pracy, przyjąć je na

podstawie rozwiązań komputerowych problemu napędzania powłok przez materiał wybuchowy.



Rys. 4. Początkowe parametry stożkowej wkładki kumulacyjnej z liniowym rozkładem prędkości masowej $W(z)$.

Na skutek zmienności prędkości $W(z)$ kąt między wkładką a osią będzie zmieniał się w czasie ruchu wkładki. Pokazany na rys. 4 element znajdujący się w punkcie A w chwili początkowej, w momencie dojścia do osi (punkt A') jest do niej skierowany pod kątem $\bar{\alpha}$. Przyjmujemy dalej, że moduł wektora $\vec{W}$ nie ulega zmianie przy przejściu od A do A' oraz, żeby dalej nie komplikować i tak już mocno uproszczonego i przybliżonego podejścia załóżmy, że jest on w punkcie A' normalny do powierzchni wkładki ($\Delta\alpha \ll \alpha$). Z rys. 4 wynika, że:

$$\operatorname{tg}\Delta\alpha = \frac{[W(z_A) - W(z_B)]t_A}{\frac{z_B - z_A}{\cos\alpha}} \tag{1.17}$$

$$t_A = \frac{r_A}{W(z_A)\cos\alpha} \tag{1.18}$$

gdzie: t_A - czas dojścia elementu A wkładki do osi.

Ponieważ:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{W(z_B) - W(z_A)}{z_B - z_A} \qquad (1.19)$$

to stąd:

$$tg\,\Delta\alpha = -\frac{r_A}{W(z_A)}\cdot\frac{dW}{dz} \qquad (1.20)$$

i po dalszych przekształceniach:

$$tg\,\Delta\alpha = \frac{mz_A}{1-mz_A}\,tg\alpha \approx \Delta\alpha \qquad (1.21)$$

Stąd ostatecznie:

$$\bar{\alpha} = \alpha + \frac{mz_A}{1-mz_A}\,tg\alpha \qquad (1.22)$$

$$V_j = W_o(1-mz_A)\cdot\frac{1+\cos\bar{\alpha}}{\sin\bar{\alpha}} \qquad (1.23)$$

Ponieważ punkt A jest dowolnie wybranym punktem wkładki więc współrzędną z_A należy rozumieć jako zmienną określającą w chwili początkowej położenie elementów wkładki wzdłuż osi z. Współrzędna z_A ma więc charakter współrzędnej Lagrange'a danego elementu. Aby określić rozkład prędkości strumienia we współrzędnych Eulera, a więc wzdłuż osi w określonej chwili czasu, należy dokonać następującej transformacji - przyporządkowujemy elementom z_A ich aktualne w danej chwili czasu położenia na osi z, oznaczone jako $z_A(t)$:

$$z_A(t) = z_A + t_A\cdot W(z_A)\sin\alpha + V_j(z_A)(t-t_A) \qquad (1.24)$$

Oczywiście wyrażenie to ma sens dla $t \geq t_A$. Po dalszych przekształceniach mamy:

$$z_A(t) = z_A(1+tg^2\alpha) + W_o(1-mz_A)\frac{1+\cos\bar{\alpha}}{\sin\bar{\alpha}}(t-t_A) \qquad (1.25)$$

Procedura wyznaczania prędkości strumienia wzdłuż osi z jest więc następująca:

- dla elementu o współrzędnej z_A określamy ze wzoru (1.22) kąt $\bar{\alpha}(z_A)$, a z wyrażenia (1.23) - prędkość strumienia $V_j(z_A)$;
- ze wzoru (1.25) wyznaczamy położenie elementu strumienia na osi z, w dowolnej chwili czasu $z_A(t)$;
- jeśli tę procedurę powtórzymy dla n elementów w tej samej chwili czasu $t = t^*$, to otrzymamy poszukiwany rozkład prędkości strumienia wzdłuż osi z: $V_j(z, t=t^*)$.

W ramach przyjętych założeń modelowych można wyliczyć jeszcze promienie elementów strumienia i zbitka.
Ponieważ dla obserwatora znajdującego się w punkcie S zachodzi $|v_j| = |v_p| = |v_o|$, więc można przyjąć, że odpowiednie masy elementów płynu na jednostkę długości wynoszą:

$$m_o = 2\pi r_A \delta \varrho_o \qquad (1.26)$$

$$m_j = \pi r_j^2 \varrho_o \qquad (1.27)$$

$$m_p = \pi r_p^2 \varrho_o \qquad (1.28)$$

gdzie symbole r_j, r_p, δ odpowiednio oznaczają: promienie elementów strumienia i zbitka oraz grubość wkładki w chwili początkowej.
Wykorzystując wyrażenie (1.1) dostajemy:

$$r_j^2 + r_p^2 = 2 r_A \delta \qquad (1.29)$$

Z drugiej strony korzystając ze wzorów (1.10) i (1.11) w chwili gdy element znajdujący się początkowo w punkcie A osiąga punkt A' mamy:

$$\frac{r_j^2}{r_p^2} = tg^2\frac{\bar{\alpha}}{2} \qquad (1.30)$$

Wykorzystując wyrażenia (1.29) i (1.30), po prostych przekształceniach dostajemy poszukiwany rozkład promieni elementów strumienia:

$$r_j = \sqrt{z_A \delta \operatorname{tg}\alpha (1 - \cos\alpha)} \qquad (1.31)$$

Wzór (1.31) określa jednak tylko początkowe promienie strumienia w momencie jego tworzenia się. Istnienie gradientu prędkości - patrz wzór (1.23) - będzie powodowało wydłużanie się strumienia w czasie, a co za tym idzie zmniejszanie się promieni poszczególnych elementów. Jeśli przez z'_A oznaczyć położenia początkowe elementów strumienia na osi, a przez r_j^* aktualny promień elementu, to możemy napisać następującą relację wynikającą z prawa zachowania masy:

$$\pi (r_j)^2 = \pi (r_j^*)^2 \left[1 - \frac{dV_j}{dz'_A} (t - t_A)\right] \qquad (1.32)$$

Związek między położeniem początkowym elementu na osi z'_A, a jego położeniem na wkładce z_A jest następujący:

$$z'_A = z_A (1 + \operatorname{tg}^2\alpha) \qquad (1.33)$$

Z wyrażeń (1.32) i (1.33) dostajemy ostatecznie:

$$r_j^* = r_j \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha \frac{dV_j}{dz_A} (t - t_A)}} \qquad (1.34)$$

Mimo, że przedstawiona teoria zawiera wiele uproszczeń i modelowych założeń znalazła ona swoje eksperymentalne potwierdzenie w określonych zakresach parametrów wkładek. W następnych rozdziałach problem ten będzie szerzej rozwinięty.

1.2. Aktualny stan badań w ramach klasycznej teorii kumulacji.

Szeroki zakres prac związanych z kumulacją doprowadził do nagromadzenia określonej liczby wyników eksperymentalnych, których nie można było zinterpretować w oparciu o teorię klasyczną, przedstawioną w głównych zarysach w poprzednim rozdziale.

Wytłumaczenie tych efektów wymagało określonego rozbudowania tej teorii i określenia obszarów, w których może ona być stosowana. Jednym z pierwszych takich efektów, który nie mógł być zinterpretowany w ramach tej teorii było istnienie tzw. kąta krytycznego. Eksperymentalnie stwierdzono, że w określonych warunkach obciążenia wkładki, przy zmniejszaniu jej kąta rozwarcia α, poniżej pewnego kąta krytycznego strumień kumulacyjny nie powstaje. Tymczasem ze wzoru (1.14) wynika, że przy $\alpha \to 0$ powinno zachodzić: $V_j \to \infty$. Wyjaśnienie tego zjawiska jest następujące. Teoria hydrodynamiczna nie uwzględnia faktu, że w pewnych warunkach prędkość napływu warstwy cieczy $|\vec{v}_0|$ na punkt rozdzielenia S może być większa od prędkości dźwięku w materiale wkładki.

Wprowadźmy liczbę Macha:

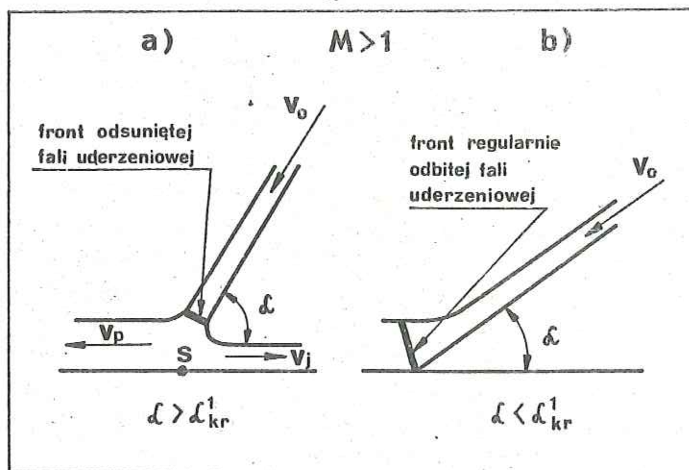
$$M = \frac{|\vec{v}_0|}{c} \qquad (1.35)$$

gdzie c jest lokalną prędkością dźwięku w materiale wkładki.

Przy M<1 w punkcie rozdzielenia strumieni nie powstaje fala uderzeniowa i możemy do takiego przypadku stosować teorię hydrodynamiczną. Jeśli natomiast mamy przepływ z liczbą M>1 to w otoczeniu punktu S powstanie fala uderzeniowa i obraz zachodzących zjawisk może być już zupełnie inny. Tak więc można w tym momencie sformułować pierwszy, istotny wniosek:

klasyczna teoria kumulacji może opisywać względnie poprawnie tylko te procesy tworzenia się strumieni, dla których zachodzi M<1.

Dla M>1 możemy mieć do czynienia z dwoma obrazami falowymi rozpatrywanego zjawiska, znanymi z mechaniki ośrodków ciągłych. Otóż proces odbicia fali uderzeniowej może mieć charakter regularny lub nieregularny w zależności od kąta zderzenia. Jakościowo sytuację tę zilustrowano na rys.5.



Rys.5. Konfiguracje fal uderzeniowych w przepływie naddźwiękowym.

Jak wiadomo odbicie nieregularne powstaje dla kątów $\alpha > \alpha^1_{kr}$ a regularne dla $\alpha < \alpha^1_{kr}$. W przypadku $\alpha < \alpha^1_{kr}$ jest oczywiste, że materiał wkładki nie może wypłynąć przez front fali uderzeniowej, a więc w tym przypadku strumień kumulacyjny nie będzie powstawał. Wartość α^1_{kr} można więc określić badając kąty krytyczne regularnego odbicia w konkretnych materiałach, np. tak jak to uczyniono w pracy [79]. Kąt α^1_{kr} można również określić na podstawie pewnych prac eksperymentalnych [10,16]. Przykładowe wyniki wraz z innymi danymi zostaną podane w dalszej części tego rozdziału. Interesujący jest przypadek kiedy M>1 i $\alpha > \alpha^1_{kr}$. Odsunięty front fali uderzeniowej (rys.5a) daje możliwość rozpłynięcia się masy wkładki (po przejściu przez ten front) na strumień i zbitek. Okazało się, że w praktyce można takie przypadki zrealizować, ale strumień kumulacyjny skutkiem rozprężenia ośrodka po wyjściu z obszaru fali uderzeniowej ulega słabszej lub silniejszej fragmentacji. Fragmenty te mogą być cząstkami ciała stałego, cieczy lub nawet przy α bliskim α^1_{kr} mogą być parami ośrodka. W tym przypadku nie mamy więc do czynienia z tworzeniem się klasycznego, ciągłego strumienia kumulacyjnego. Oczywiście, granicę między litym a porozrywanym strumieniem wyznacza liczba M=1 i ona też określa drugi kąt krytyczny – α^2_{kr}. Z (1.13) przy M=1 wynika, że:

$$\alpha^2_{kr} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{|\vec{W}|}{c}\right) \tag{1.36}$$

Ze wzoru (1.36) wynika bardzo praktyczny wniosek, że aby otrzymać jednorodny strumień kumulacyjny, prędkość jego czoła nie powinna zbytnio przekraczać dwóch prędkości dźwięku w materiale wkładki [14,22]. Ze wzorów (1.14) i (1.36) mamy bowiem:

$$V_j = c + \sqrt{c^2 + W^2} \tag{1.37}$$

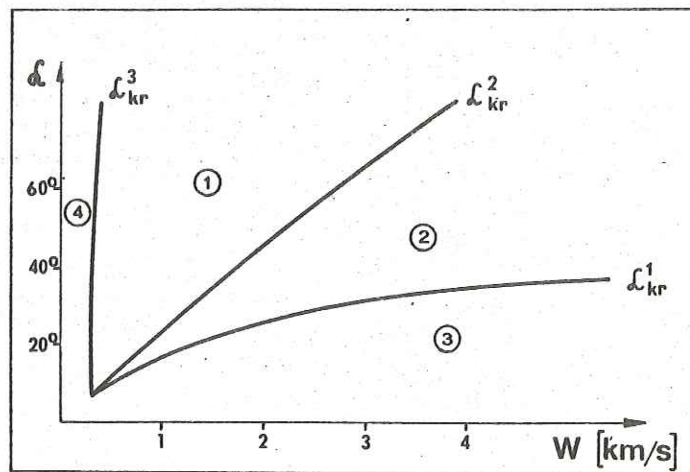
Następne ograniczenie, które należy nałożyć na teorię hydrodynamiczną, wiąże się z nieuwzględnianiem przez nią własności wytrzymałościowych materiałów. Jest bowiem oczywiste, że nie powinniśmy obserwować tworzenia się strumienia, gdy energia kinetyczna elementów wkładki nie spowoduje plastycznego płynięcia materiału (nie zostanie przekroczona granica plastyczności Y). Wynika stąd trzeci kąt krytyczny $\alpha = \alpha^3_{kr}$, który można oszacować następująco [22]:

$$\frac{1}{2}\rho W^2 \cos^2\alpha > Y \tag{1.38}$$

a stąd:

$$\alpha^3_{kr} = \arccos \sqrt{\frac{2Y}{\varrho W^2}} \tag{1.39}$$

Rozważania te najlepiej będzie podsumować posługując się przykładowymi, zbiorczymi wykresami [22], które zamieszczono na rys.6.



Rys.6. Krytyczne kąty tworzenia się strumieni kumulacyjnych (dla miękkiej stali).

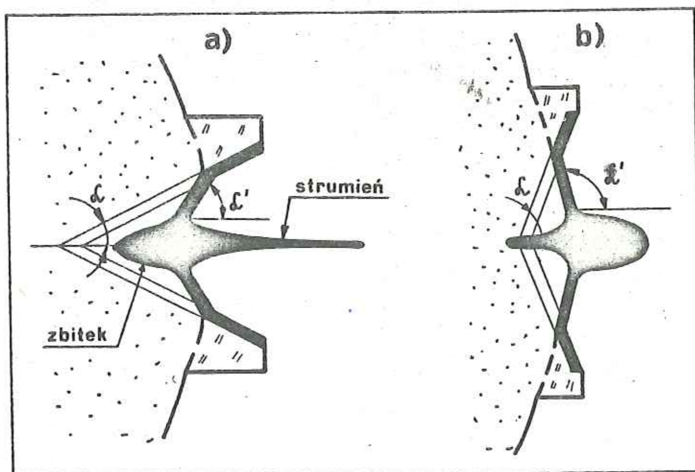
Ciągłe strumienie kumulacyjne, które mogą być opisywane teorią hydrodynamiczną, powstają tylko w obszarze 1. W obszarze 2 powstają strumienie nieciągłe (złożone z cząstek ciała stałego, cieczy lub pary). W obszarach 3 i 4 z omówionych wyżej powodów strumienie kumulacyjne nie powstają. W tym miejscu należy podkreślić, że parametry strumieni w obszarze 1 w miarę zbliżania się do kąta $\alpha = \alpha^3_{kr}$ będą stopniowo odbiegać od parametrów danych przez teorię hydrodynamiczną. Granica ta ma bowiem dość umowny charakter i w jej pobliżu własności wytrzymałościowe nie mogą być już pomijane. Jednakże, mimo iż wykresy zamieszczone na rys.6 mają nieco umowny charakter (krzywa α^3_{kr}) lub też zawierają dane dla symetrii płaskiej (krzywa α^1_{kr}), mają one fundamentalne znaczenie dla zrozumienia obserwowanych w eksperymencie zjawisk i przynajmniej jakościowej ich analizy.

Na zakończenie tego rozdziału należy jeszcze zwrócić uwagę na inne efekty, zaobserwowane w eksperymencie, a również nie mieszczące się w ramach teorii hydrodynamicznej. Zauważono na przykład, że cylindryczne otoczki napędzone przez materiał wybuchowy do niezbyt dużych prędkości, mogą być wyraźnie wyhamowywane lub nawet zatrzymane przed dojściem do osi. Natomiast przy bardzo silnych obciążeniach zaobserwowano nawet parowanie wewnętrznych ścianek otoczek skutkiem szybkiej zamiany energii kinetycznej w ciepło. Okazuje się, że efekty te mogą być wytłumaczone tylko w oparciu o złożone modele ośrodków, uwzględniające ich sprężysto-lepko-plastyczne właściwości [80,81]. Informacje te sugerują jednoznacznie, że określonych rozbieżności z teorią hydrodynamiczną można oczekiwać w pewnych przypadkach już na etapie zbiegania się wkładek do osi. Charakter tego zbiegania może znacznie różnić się od przewidywanego przez model cieczy idealnej. Przykładem takiego trudnego przez dłuższy czas do wyjaśnienia zjawiska, była generacja par metali w silnie obciążonych otoczkach, o kątach rozwarcia mniejszych niż α^1_{kr} [11,82,83]. Okazało się że zjawisko to wywołane jest bardzo silnym nagrzewaniem i parowaniem wewnętrznych ścianek otoczki i wypływem par z jej wnętrza, jeszcze przed zajściem właściwego efektu kumulacyjnego (zarejestrowano prędkości par metali sięgające nawet 90 km/s).

Przytoczone w tym rozdziale rozważania świadczą o tym, że w procesie kumulacji mogą występować różne zjawiska, których interpretacja może być trudna lub nawet niemożliwa za pomocą teorii hydrodynamicznej. Jedynie badania w oparciu o teorię sprężysto-lepko-plastyczności uwzględniającą dodatkowo efekty fragmentacji, parowania, itp. są w stanie dać w miarę pełną interpretację eksperymentów.

1.3. Idea "kumulacji odwrotnej".

Przez dłuższy czas nie zwracano większej uwagi na zjawiska kumulacyjne zachodzące przy dużych kątach rozwarcia wkładki kumulacyjnej. Wynikało to z faktu, że w miarę zwiększania kąta α zmniejsza się długość i prędkość strumienia kumulacyjnego, a co za tym idzie szybko spada efektywność jego oddziaływania na przegrody (maleje głębokość przebicia). Zainteresowanie tymi zjawiskami zaczęło wyraźnie wzrastać w latach 70-tych, gdy zjawiskami okazało się, że można je wykorzystać do przebijania wszelkiego rodzaju osłon, ale na zupełnie innej zasadzie niż ta, na której oparte jest działanie ładunku klasycznego. W literaturze radzieckiej [84,85] przyjęto określać to zjawisko terminem "kumulac.a odwrotna". Jego istotę oraz genezę tego terminu można wyjaśnić najprościej analizując sytuację przedstawioną na rys.7.



Rys.7. Schematyczne przedstawienie zjawisk kumulacji:
a) - "klasycznej" ; b) - "odwrotnej".

Na rys.7a) przedstawiono znany już schemat generacji klasycznego strumienia kumulacyjnego. Wkładka o połówkowym kącie rozwarcia α (w typowych ładunkach $\alpha \approx 20 \div 30°$) w wyniku oddziaływania na nią produktów detonacji ulega dynamicznemu załamaniu tworząc z osią ostry kąt α'. W kierunku przegrody generuje się strumień kumulacyjny o stosunkowo niewielkiej masie (rzędu 20% ÷ 30% masy wkładki) i dużej prędkości czołowych elementów, rzędu 8÷10 km/s. Zbitek, zawierający pozostałą część masy wkładki, porusza się również w kierunku przegrody, ale z niewielką prędkością rzędu 0,5 km/s i nie odgrywa praktycznie żadnej roli w procesie jej przebijania.

Natomiast na rys.7b) przedstawiono ideowo proces oddziaływania produktów detonacji na wkładkę o dużym ($\alpha \approx 60° \div 80°$), początkowym kącie rozwarcia. W wyniku tego oddziaływania dynamiczny kąt załamania wkładki α' może być większy od kąta prostego. Według metodologii klasycznej teorii kumulacji (wzory (1.8) ÷ (1.11)) będziemy mieli w tym przypadku następującą sytuację: w kierunku przegrody będzie przemieszczać się najpierw stosunkowo duża część masy wkładki (≈ 70% ÷ 80%) z dość znaczną prędkością rzędu 2 ÷ 3 km/s, a za nią podążał będzie niewielki strumień o kilka razy mniejszej prędkości. Można więc powiedzieć, że w stosunku do kumulacji klasycznej "odwrócone" zostały role zbitka i strumienia. Elementem szybszym i decydującym o przebiciu jest teraz zbitek, a nie strumień. Zgodnie z taką umowną klasyfikacją o podziale zjawisk kumulacyjnych na "klasyczne" i "odwrotne" decyduje dynamiczny kąt załamania wkładki α'. Granicę rozdziału wyznacza kąt $\alpha' = 90°$.

Okazało się jednakże, że taka klasyfikacja i nazewnictwo nie są adekwatne do zjawisk obserwowanych w eksperymentach. Wynika to stąd, że przy dużych kątach α decydujący wpływ na przebieg zjawiska mają efekty wytrzymałościowe. Model klasyczny, w którym wkładkę traktuje się jak warstwę cieczy idealnej, nie może w takiej sytuacji oddać ilościowych ani nawet jakościowych charakterystyk procesu. Efekty

wytrzymałościowe powodują bowiem szybkie wyrównywanie, stosunkowo niewielkich w tym przypadku gradientów prędkości poosiowej i uniemożliwiają rozdzielenie przepływu na strumień i zbitek. Praktycznie cała masa zdeformowanej wkładki, tworząc jedno ciało przemieszcza się w kierunku przegrody. Kształt tego ciała (pocisku) zależy od konkretnych charakterystyk całego układu kumulacyjnego. Z tego powodu coraz częściej proponuje się zastąpienie terminu "kumulacja odwrotna" sformułowaniem "wybuchowe kształtowanie pocisków".

W chwili obecnej ładunki do wybuchowego kształtowania pocisków znalazły już szereg praktycznych zastosowań, mimo iż głębokość przebicia pancerza takim pociskiem jest od 5 do 10 razy mniejsza od klasycznego ładunku kumulacyjnego o tej samej średnicy wkładki. Ten niedostatek jest jednak rekompensowany dużą masą pocisku i prawie o rząd większą średnicą krateru jaki tworzy on w pancerzu. Jest więc oczywiste, że w tych przypadkach, w których nie jest wymagana zbyt duża głębokość przebicia, efekt niszczący takiego pocisku będzie o wiele silniejszy niż klasycznego strumienia kumulacyjnego.

Z drugiej strony wiadomo, że klasyczne ładunki kumulacyjne muszą być detonowane w dość precyzyjnie dobranej odległości od pancerza, aby osiągnąć maksymalną głębokość przebicia. Zdetonowanie takiego ładunku na jakiejkolwiek przeszkodzie przed właściwym pancerzem powoduje, że strumień zbyt wcześnie fragmentuje się i rozprasza radialnie. Prowadzi to do szybkiego spadku głębokości przebicia. Natomiast wybuchowo ukształtowany pocisk o dużej masie i wyrównanej prędkości poosiowej może jednakowo skutecznie razić cele znajdujące się w różnych odległościach od miejsca detonacji. Odległości te mogą wynosić dziesiątki, a nawet setki metrów. Na torze swego lotu pocisk taki może przebijać nie tylko pojedyncze, ale i kaskadowo ustawione przegrody. Te właściwości wybuchowo kształtowanych pocisków zdecydowały o ich licznych zastosowaniach np. w minach dennych, burtowych i innych konstrukcjach, zwiększając znacznie ich kierunkową siłę i zasięg rażenia.

Pierwszą minę przeciwpancerną wykorzystującą ten efekt zaprezentowano w RFN w 1962 r. W latach 70-tych rozpoczęto bardzo intensywne badania tych zjawisk, które w latach 80-tych weszły na jakościowo wyższy etap, wspomagane złożonymi modelami komputerowymi.

W Polsce badania eksperymentalne zjawiska "odwrotnej kumulacji" zostały zainicjowane w WAT i prowadzone we współpracy z IFPiLM (patrz np. prace [38,39]). Wyniki tych badań wpłynęły inspirująco na podjęcie tematu niniejszej pracy.

1.4. Informacje literaturowe dotyczące modelowania komputerowego zjawisk kumulacyjnych.

Silne założenia upraszczające leżące u podstaw klasycznej teorii kumulacji oraz praktycznie brak możliwości ich istotnego złagodzenia przy próbach znalezienia rozwiązań analitycznych, zrodziły potrzebę poszukiwania innych sposobów rozwiązania tych problemów.
Z pomocą przyszły tu metody fizyki komputerowej, intensywnie rozwijane zwłaszcza w USA i ZSRR od końca lat 50-tych. Jednakże, mimo zgromadzenia dużej liczby prac z tej dziedziny, zagadnienia kumulacji dość długo nie mogły doczekać się choćby uproszczonych rozwiązań. Modelowanie komputerowe zjawisk kumulacyjnych wymaga bowiem rozwiązania szeregu bardzo trudnych problemów, o których wspomniano już we wstępie, a które dokładniej zostaną przedstawione w punkcie 1.5.

Pierwsza praca [24] dotycząca modelowania komputerowego zjawisk kumulacyjnych ukazała się dopiero w 1976 i w dalszym ciągu informacji o takich modelach jest niewiele. W chwili obecnej informacje odnośnie modelowania komputerowego "kumulacji klasycznej" można znaleźć w pracach [24÷26], a "kumulacji odwrotnej" w [27,29÷36].
Prace dotyczące "kumulacji odwrotnej" zaczęły ukazywać się praktycznie dopiero w połowie lat 80-tych. W ostatnim czasie ukazało się również kilka pozycji [86,87] w specjalistycznych

czasopismach wojskowych, z których wynika, że rozpoczęto już stosowanie niektórych modeli do projektowania konkretnych układów kumulacyjnych. W oparciu o model, który będzie zaprezentowany w pracy niniejszej, badania wspierające projektowanie układów kumulacyjnych rozpoczęto w 1987 r.

Na bazie dostępnych informacji literaturowych można w chwili obecnej zbudować pewną ogólną klasyfikację metod komputerowych, które zostały wykorzystane w badaniach zjawisk kumulacyjnych. W zależności od typów wykorzystywanych schematów numerycznych, są to:

- metoda współrzędnych Lagrange'a [27,33];
- metoda współrzędnych Eulera [24,25,26,31];
- metody mieszanych współrzędnych Eulera i Lagrange'a [29,30,32,34,35];
- metoda elementów skończonych [36].

Przed bardziej szczegółowym przeanalizowaniem najistotniejszych wyników tych prac można ogólnie następująco scharakteryzować te grupy algorytmów:

1. Metoda współrzędnych Lagrange'a.

W algorytmach tego typu numeryczna sieć porusza się i deformuje wraz z ośrodkiem. Większość prac z tej dziedziny bazuje na fundamentalnym algorytmie M.Wilkinsa [55]. Podstawową zaletą takiego algorytmu jest to, że umożliwia on wygodne i dokładne modelowanie ruchomych granic rozdziału ośrodków i linii brzegowych. Po drugie, bez względu na zachodzące deformacje, zachowuje się w trakcie rozwiązywania problemu stała liczba węzłów sieci numerycznej. Po trzecie, sieć poruszająca się wraz z ośrodkiem pozwala na uniknięcie szeregu problemów związanych z transportem strumieni masy, pędu czy energii przez granice siatek. Podejście takie ma jednak jeden bardzo poważny mankament. Otóż, jeśli w wyniku ruchu ośrodka sieć Lagrange'a zaczyna się silnie deformować, wówczas pierwotnie regularne komórki sieci zaczynają przybierać stopniowo coraz bardziej nieregularne kształty. Prowadzi to z

czasem do utraty dokładności obliczeń, a utrzymanie stabilności wymaga szybkiego zmniejszania kroku czasowego. W takim momencie należy obliczenia przerwać, albo - jeśli zależy nam na analizie dalszych faz zjawiska - dokonać rekonstrukcji siatki [88].

2. Metoda współrzędnych Eulera.

W przypadku bardzo silnych deformacji ośrodka metoda Lagrange'a może okazać się zbyt niewygodną w stosowaniu. Lepsze rezultaty można wówczas osiągnąć stosując algorytmy wykorzystujące współrzędne Eulera. W algorytmach tych stosuje się nieruchomą, regularną sieć współrzędnych, przez którą przepływa rozważany ośrodek. W ten sposób można dość prosto uniknąć komplikacji związanych z dużymi deformacjami ośrodka, ale w zamian za to pojawiają się inne, dość poważne problemy. Granice ośrodka przemieszczające się na tle nieruchomej siatki tworzą zmieniające się w czasie, nieregularne komórki, w których obliczenia należy prowadzić za pomocą specjalnych algorytmów wykorzystujących elementy metody Lagrange'a (wprowadza się np. tzw. "cząstki znaczone" poruszające się wraz z ośrodkiem [61]). Znaczne trudności wynikają również przy obliczaniu transportu strumieni przez nieruchome oczka siatki. Z reguły proces obliczeniowy rozbija się na kilka etapów, np. w pierwszym etapie nie uwzględnia się członów konwekcyjnych i wylicza tylko przybliżone wartości wynikające z pracy sił ciśnienia, a w drugim etapie korzystając z tych wartości wylicza się strumienie między poszczególnymi komórkami siatki [69,70]. Zaawansowane i dokładne algorytmy [69] zawierają z reguły więcej rozbudowanych etapów obliczeń i korekcji, i prowadzą do bardzo złożonych struktur obliczeniowych.

3. Metoda mieszanych współrzędnych Eulera i Lagrange'a.

W wielu zagadnieniach, ze względu na wyżej wymienione wady obu metod, proponuje się używanie algorytmów mieszanych, wykorzystujących ich elementy.

Z tej grupy metod w zagadnieniach kumulacji znalazły do tej pory zastosowanie głównie:

- metoda "cząstek w sieci" (PIC);
- metoda "dużych cząstek";
- metoda "ruchomych siatek".

W metodzie "cząstek w sieci" (PIC) kontinualny ośrodek zastępuje się zbiorem cząstek, które unoszą ze sobą masę, pęd i energię ośrodka i przemieszczają się na tle nieruchomej, eulerowskiej siatki współrzędnych. Zbiór poruszających się cząstek tworzy analog drugiej, lagrange'owskiej sieci. Sieć nieruchoma służy do wyznaczania gradientów pól, w których poruszają się cząstki ośrodka. Niewątpliwą zaletą tej metody jest możliwość modelowania złożonych ruchów wieloskładnikowych ośrodków [58,61,130]. Wadami tej metody są natomiast wysokie wymagania odnośnie mocy obliczeniowej EMC (pamięć i szybkość obliczeń) oraz trudne do wyeliminowania fluktuacje występujące wówczas gdy w jakiejś komórce znajdzie się zbyt mała liczba dyskretnych cząstek. Oczywiście, można starać się przezwyciężyć te trudności różnymi sposobami [89] (np. przyjmując określone "rozmycie dyskretnych cząstek") ale i tak, wyniki tej metody uważa się za lepiej oddające jakościowe niż ilościowe charakterystyki zjawisk.

Ta podstawowa wada metody PIC była punktem wyjścia do budowy tzw. "metody dużych cząstek". Nie postuluje się w niej rozbicia ośrodka na dyskretne cząstki, ale traktuje masę zawartą w komórce Eulera jako jedną "dużą cząstkę" i rozważa się ciągłe strumienie tych "dużych cząstek" przez granice siatki [67]. W tym miejscu nasuwa się uwaga, że metoda ta wychodząc z lagrangeowsko-eulerowskiej metody PIC staje się praktycznie bardzo bliska metodom określanym przez innych autorów jako eulerowskie (por. prace [67] i [70]).

Metoda "ruchomych siatek" jest również próbą połączenia i wykorzystania zalet m[illegible] Lagrange'a i Eulera. Wprowadza się w niej ruchome, krzywoliniowe współrzędne, które wygodnie jest wybierać tak, aby linie brzegowe oddawały kształt granic

rozważanego ciała. Z reguły jedna ze współrzędnych ma charakter współrzędnej Eulera (nieruchoma), a druga ma charakter współrzędnej Lagrange'a (przemieszcza się wraz z ośrodkiem) [30,60]. Konkretny wybór sieci jest zdeterminowany charakterem ruchu ośrodka. Optymalny dobór takiej sieci jest jednak w praktyce bardzo skomplikowany [90], a złożoność tego zagadnienia jest porównywalna ze złożonością całego wyjściowego problemu.

W ostatnich latach pojawił się również przykład zastosowania metody elementów skończonych [36] do modelowania zjawiska "odwrotnej kumlacji". Wychodząc z zasad mechaniki w sformułowaniu wariacyjnym metoda ta dość istotnie różni się od typowych metod różnic skończonych. Operuje się tu bowiem ciągłym przybliżeniem rozwiązania ścisłego i dąży do tego aby było ono jak najlepsze w ramach przyjętego systemu funkcji bazowych. Osiąga się to poprzez minimalizację odpowiednich funkcjonałów, dochodząc w efekcie do systemów odpowiednich równań różnicowych. Zaletą takiego podejścia jest duża swoboda w sposobie dyskretyzacji ośrodka i co za tym idzie, ułatwione modelowanie układów o bardzo złożonych geometriach. Najlepsze rezultaty metoda ta daje dla równań typu eliptycznego. Dla równań hiperbolicznych jej efektywność staje się dyskusyjna. Przede wszystkim prowadzi ona w ścisłym sformułowaniu do niejawnych schematów różnicowych, które są kłopotliwe przy rozwiązywaniu i wprowadzają niepożądaną dyfuzję numeryczną prowadzącą do niefizycznego "rozmywania" frontów falowych. Oprócz tego, w zagadnieniach z ruchomymi brzegami jest sens stosować metodę do równań zapisanych we współrzędnych Lagrange'a. Rozwiązanie takie będzie więc obarczone tymi samymi ograniczeniami, które są charakterystyczne dla wyżej omówionych metod Lagrange'owskich.

Zakres, objętość i cel niniejszej pracy nie pozwalają na ogólne scharakteryzowanie nawet części algorytmów, ich różnych wersji i konkretnych sposobów realizacji poszczególnych zadań, które dotyczą ogólnie rozumianej mechaniki ośrodków ciągłych.

Nawiązano jedynie bardzo ogólnie do tych grup metod, dla których znaleziono przykłady ich zastosowań w badaniach zjawisk kumulacyjnych. Aktualność problematyki i wzrastająca szybko ilość publikacji na ten temat wskazują, że należy oczekiwać zarówno doskonalenia istniejących metod w tej dziedzinie jak również pojawienia się nowych, oryginalnych algorytmów.

Po ogólnym scharakteryzowaniu metod obliczeniowych, na zakończenie tego rozdziału, wydaje się celowym krótkie omówienie podstawowych rezultatów prac dotyczących modelowania komputerowego zjawisk kumulacyjnych. Jak już wspomniano, za pierwszą z tych prac można uznać pracę Chou, Corleone i Karppa [24]. W pracy tej przyjęto, że płaska lub stożkowa wkładka kumulacyjna została natychmiastowo napędzona do określonej prędkości (normalnej do powierzchni wkładki) i w chwili początkowej jest nachylona do osi pod stałym kątem. Wprawdzie takie warunki nigdy nie występują w eksperymencie, ale celem tej pracy była nie analiza realnych wkładek kumulacyjnych, a jedynie weryfikacja kryteriów powstawania strumienia kumulacyjnego. Przyjmowano więc warunki początkowe tak aby znaleźć się w obszarach 1,2 lub 3 przedstawionych na rys.6. Wykorzystano przy tym realne, półempiryczne charakterystyki materiałowe. Praca potwierdziła poprawność ocen, z których korzysta się przy formułowaniu kryteriów powstawania ciągłych lub pofragmentowanych strumieni kumulacyjnych. Szersze badania tego typu mogą być wykorzystane do budowy wykresów przedstawionych na rys.6 dla szerokiej klasy materiałów, bez wprowadzania dodatkowych założeń upraszczających.

Z kolei w pracy [25] przedstawiono ideę konstrukcji eulerowskiej wersji kodu numerycznego, za pomocą którego uzyskano rozwiązanie dla wstępnej fazy procesu tworzenia się strumienia. W rozwiązaniu tym uwzględniono jednocześnie detonację materiału wybuchowego oraz deformację i napędzanie wkładki. Jednakże zaprezentowanie jednego wyniku dla bardzo wczesnej fazy zjawiska nie pozwala ocenić czy kod ten daje

wyniki zgodne z eksperymentem, ani czy pozwala na kontynuowanie obliczeń dla dalszych faz zjawiska.

Praca [26] stanowi próbę zastosowania kodu typu Lagrange'a do modelowania zjawiska kumulacji klasycznej. Jak należało oczekiwać kod tego typu ze względu na swe ograniczenia może być użyty jedynie do analizy wstępnych faz procesu, a praktycznie jedynie do uzyskania informacji o stanie wkładki (kształt i prędkość) po jej napędzeniu przez produkty detonacji. Autorzy pracy w oparciu o tę informację analizują proces tworzenia się i propagacji strumienia w/g metodologii klasycznej teorii kumulacji analogicznej do przedstawionej w rozdziale 1.1. Uzyskano przy tym dość dobrą zgodność niektórych parametrów strumienia z danymi eksperymentalnymi, pomimo przyjęcia arbitralnych założeń związanych z wykorzystaniem wzorów podanych w rozdziale 1. Praca ta świadczy dobitnie o wielkich trudnościach jakie muszą być pokonane, aby w ramach jednego rozwiązania uwzględnić zarówno proces napędzania wkładki jak i proces tworzenia się strumienia kumulacyjnego. Przykładów takich kompleksowych rozwiązań skonfrontowanych z eksperymentem do chwili obecnej nie znaleziono w literaturze.

Zapewne, z uwagi na znacznie mniejsze deformacje oraz korzystniejsze (z punktu widzenia możliwości analiz numerycznych) relacje wymiarów wkładek, liczba prac poświęconych zagadnieniu "kumulacji odwrotnej" jest już w chwili obecnej znacznie większa [27,29÷36].
Jednakże, wyniki przedstawione w tych pracach, w jeszcze większym stopniu niż dotyczyło to kumulacji klasycznej, noszą charakter jedynie przykładowych ilustracji możliwości metod obliczeniowych. Nie mają one natomiast charakteru analizy zjawiska w zależności od zmian określonych parametrów.
Po drugie, z reguły nie podaje się większości parametrów rozważanych układów i po trzecie, najczęściej wyniki te dotyczą początkowych faz procesu bez określenia ostatecznego kształtu uformowanych pocisków. Na osobną uwagę zasługują w tej dziedzinie prace [27,33,86,87].

Z prac tych nie można również wyciągnąć wniosków odnośnie zakresu i rezultatów prowadzonych analiz, ale pozwalają one przynajmniej na stwierdzenie, że w przypadkach niezbyt dużych deformacji* uzyskano dobrą zgodność wyników teoretycznych z eksperymentalnymi. Zgodność ta dotyczy również późnych faz zjawiska, w których można już mówić o uformowaniu się pocisku.

Na zakończenie tego rozdziału należy odnotować jeszcze, że w zakresie niezbyt dużych deformacji oraz dla kształtów wkładek nie wymagających zbyt dużej liczby podziałów przedstawiono już pierwsze rozwiązanie problemu sformułowanego w trzech niezależnych zmiennych przestrzennych [36]. Badania tego typu mogą być pomocne w ocenach wpływu eksperymentalnych asymetrii na proces tworzenia się wybuchowo kształtowanych pocisków.

1.5. Cel pracy.

Z analizy przedstawionego materiału wynika, że klasyczna teoria kumulacji nie opisuje adekwatnie do rzeczywistości kompleksu zjawisk towarzyszących napędzaniu i deformacji powłok (wkładek) metalowych o złożonej geometrii w wyniku oddziaływania na nie produktów detonacji. Nie uwzględnia ona fizyko-mechanicznych właściwości wkładek, jak również procesów związanych z detonacją i właściwościami materiałów wybuchowych.

Dane literaturowe z zakresu fizyki komputerowej, które uwzględniają wymienione właściwości wkładek i materiałów wybuchowych, podawane są w formie sygnalnej i nie można ich wykorzystać do analizy konkretnych układów kumulacyjnych.

Wynikła zatem potrzeba opracowania nowego matematyczno-fizycznego modelu układów kumulacyjnych wraz z odpowiednim kodem numerycznym, umożliwiającym komputerowe symulowanie dynamiki procesów napędzania i programowanego kształtowania metalowych powłok, w pełnej zgodości z warunkami eksperymentu.

Dla spełnienia wymienionych wymagań model taki powinien zawierać:

- ogólne równania gazodynamiki i półempiryczne równania stanu dla opisu przestrzennych procesów detonacji materiałów wybuchowych;
- równania teorii sprężysto/lepko-plastyczności wraz z półempirycznymi charakterystykami materiałowymi dla opisu procesów deformowania i napędzania metalowych wkładek kumulacyjnych.

Algorytm obliczeniowy powinien natomiast umożliwiać:

- prowadzenie obliczeń w warunkach skrajnie dużych odkształceń i niejednorodności zdeformowanej wkładki, łącznie z możliwością jej fragmentacji;
- stawianie warunków brzegowych na ruchomych i krzywoliniowych powierzchniach;
- zszywanie rozwiązań na kontakcie metal - produkty detonacji;
- prowadzenie analiz efektów kumulacyjnych dla wkładek o różnych kształtach i wymiarach;
- otrzymanie stabilnych rozwiązań dla dostatecznie długich czasów (w badanym problemie do czasów oderwania się strumienia kumulacyjnego od zbitka lub ostatecznego uformowania się pocisku w procesie "kumulacji odwrotnej").

Skonstruowanie i przedstawienie takiego kompleksowego modelu wraz z przykładami jego zastosowań skonfrontowanymi z eksperymentem jest celem niniejszej pracy.

Rozdział 2

MATEMATYCZNO- FIZYCZNE SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

W rozdziale tym przedstawione zostaną równania, którymi opisano procesy detonacji skondensowanych materiałów wybuchowych (MW) oraz deformacji i napędzania metalicznych wkładek kumulacyjnych. Równania te opisują zjawiska niestacjonarne i dwuwymiarowe przestrzennie. W zagadnieniach kumulacji najwygodniej jest stosować równania zapisane w symetrii cylindrycznej (r , z , $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$) i w takiej też postaci będą one używane w niniejszej pracy. Można tylko dodać, że metoda numeryczna, która będzie omówiona w następnym rozdziale, pozwala na bardzo proste i szybkie przejście do rozwiązywania zagadnień w symetrii płaskiej (x , y , $\frac{\partial}{\partial z} = 0$).

Podstawowe równania gazodynamiki i mechaniki ciał odkształcalnych nie będą w pracy wyprowadzane, ani szeroko komentowane, gdyż są one znane z bardzo wielu publikacji. Bardziej szczegółowym komentarzem zostaną natomiast opatrzone te elementy matematyczno-fizycznego opisu, które są wynikiem najnowszych opracowań lub mają charakter własnych badań. Dotyczy to głównie efektów lepkich oraz zjawisk tworzenia się szczelin w ciałach stałych.

Przedstawione w poprzednim rozdziale problemy jakie występują przy analizie zjawisk kumulacyjnych oraz dążenie do uzyskania maksymalnej zgodności między wynikami teoretycznymi a eksperymentalnymi spowodowało, że model matematyczno-fizyczny był w trakcie pracy ciągle rozbudowywany i uzupełniany. W swej aktualnej postaci jest on modelem dość ogólnym i uwzględnia najnowsze wyniki badań dotyczące własności materiałów w warunkach dynamicznych obciążeń. Zaletą takiego ogólnego opisu jest to, że pozwala on w ramach jednego modelu numerycznego na uzyskanie zgodnych z eksperymentem rozwiązań szeregu złożonych zagadnień początkowo-brzegowych (kumulacja klasyczna, kumulacja odwrotna, przebijanie przegród pociskami itp.).

2.1. Opis procesu detonacji materiałów wybuchowych.

Do opisu procesu detonacji będziemy stosować teorię hydrodynamiczną. Zgodnie z tą teorią zachowanie się produktów detonacji można opisać znanym układem równań:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \, div \, \vec{\omega} = 0 \qquad (2.1)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial r} \qquad (2.2)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial z} \qquad (2.3)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = - p \, div \, \vec{\omega} \qquad (2.4)$$

przy następujących oznaczeniach:

t - czas,
r , z -współrzędne przestrzenne (symetria cylindryczna)
ρ - gęstość,
p - ciśnienie,
u , v - składowe wektora prędkości ruchu produktów wybuchu $\vec{\omega}$ odpowiednio wzdłuż osi r i z ,
ε - energia wewnętrzna na jednostkę masy.

Pochodna substancjalna $\frac{d}{dt}$ oraz wyrażenie div $\vec{\omega}$, są zdefiniowane następująco:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + v \frac{\partial}{\partial z} \qquad (2.5)$$

$$div \, \vec{\omega} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{r} \qquad (2.6)$$

Układ równań (2.1) do (2.4) uzupełnia równanie stanu produktów detonacji, wiążące ciśnienie z gęstością i energią wewnętrzną.

W literaturze można znaleźć bardzo wiele różnych postaci równań stanu dla szerokiej gamy materiałów wybuchowych.

Syntetyczny przegląd tych równań został podany, np. w pracy [91].
Przykładowe rozwiązania zamieszczone w pracy niniejszej bazowały początkowo na równaniu stanu termoplastycznego MW o postaci:

$$p = C\rho^3 + \delta\rho\varepsilon \qquad (2.7)$$

gdzie: C, δ - stałe empiryczne.

W późniejszych pracach wprowadzono jednolitą i bardzo dokładnie opracowaną postać równania stanu przez tzw. zespół EOS z laboratorium Los Alamos. Równanie to oznaczono symbolem JWL (Jones, Wilkins, Lee) i podano wartości odpowiednich współczynników dla szerokiej gamy różnych materiałów wybuchowych.

Równanie stanu JWL produktów detonacji ma następującą ogólną postać:

$$p = A\left(1 - \frac{\delta}{R_1 V}\right)e^{-R_1 V} + B\left(1 - \frac{\delta}{R_2 V}\right)e^{-R_2 V} + \delta\rho\varepsilon \qquad (2.8)$$

gdzie: $V = \frac{\rho_0}{\rho}$

Wartości stałych współczynników A, B, δ, R_1, R_2 i ρ_0 dla typowych MW zebrano w tabeli 1.

W rozważanych zagadnieniach kumulacji, wymiary układów są o kilka rzędów wielkości większe od wymiarów charakterystycznych strefy reakcji chemicznych w fali detonacyjnej. Pozwala to na stosowanie hydrodynamicznej teorii detonacji i modelowanie frontu fali detonacyjnej powierzchnią silnej nieciągłości.
W wielu pracach [29,32,44,92] sprawdzono, że daje ono dobre rezultaty i co również jest bardzo ważne - nie wymaga zbyt gęstych sieci numerycznych. Polega ono na tym, że zakłada się iż front fali detonacyjnej jest ruchomą powierzchnią silnej nieciągłości o zadanym kształcie i parametrach odpowiadających

Tabela 1. Współczynniki dla równania stanu typu JWL.

Nazwa MW	ρ_0 [g/cm³]	A [Mbar]	B [Mbar]	R_1	R_2	δ
komp. A-3	1.650	6.113	0.1065	4.40	1.20	0.32
Komp. B	1.717	5.242	0.0768	4.20	1.10	0.34
Komp. C-4	1.601	6.098	0.1295	4.50	1.40	0.25
Cyklotol 77/23	1.754	6.034	0.0992	4.30	1.10	0.35
HMX	1.891	7.783	0.0707	4.20	1.00	0.30
LX-01	1.230	3.110	0.0476	4.50	1.00	0.35
LX-04-01	1.865	8.364	0.1298	4.62	1.25	0.42
LX-07	1.865	8.481	0.1710	4.58	1.25	0.40
LX-09-1	1.840	8.481	0.1710	4.58	1.25	0.40
LX-10-1	1.865	8.807	0.1836	4.62	1.32	0.38
LX-11	1.875	7.791	0.1067	4.50	1.15	0.30
LX-14-0	1.835	8.261	0.1724	4.55	1.32	0.38
LX-17-0	1.900	4.460	0.1339	3.85	1.03	0.46
Oktol 78/22	1.821	7.486	0.1338	4.50	1.20	0.38
PBX-9010	1.787	5.814	0.0680	4.10	1.00	0.35
PBX-9011	1.777	6.347	0.0800	4.20	1.00	0.30
PBX-9404-3	1.840	8.524	0.1802	4.55	1.30	0.38
PBX-9407	1.600	5.732	0.1464	4.60	1.40	0.32
Pentolit	1.700	5.410	0.0937	4.50	1.10	0.35
PETN	0.880	3.486	0.1129	7.00	2.00	0.24
PETN	1.260	5.731	0.2016	6.00	1.80	0.28
PETN	1.500	6.253	0.2329	5.25	1.60	0.28
PETN	1.770	6.170	0.1693	4.40	1.20	0.25
Tetryl	1.730	5.868	0.1067	4.40	1.20	0.28
TNT	1.630	3.712	0.0323	4.15	0.95	0.30
Nitrometan	1.128	2.092	0.0569	4.40	1.20	0.30

punktowi Chapmana-Jougueta (C-J). Z reguły przyjmuje się, że kształt frontu fali detonacyjnej jest płaski, sferyczny, toroidalny lub stanowi ich kombinację. Rozwiązanie konstruuje się więc tylko dla samych produktów detonacji, między czołem fali detonacyjnej a brzegiem.
Oczywiście, takie sformułowanie zagadnienia wymaga znajomości parametrów w punkcie C-J dla różnych materiałów wybuchowych. W tabeli nr 2 zebrano je dla tych samych materiałów, których dotyczy tabela nr 1. Dane zawarte w tabeli nr 2 pozwalają obliczyć gęstość ϱ_H i prędkość normalną do czoła fali detonacyjnej w_H w punkcie C-J z prostych zależności:

$$w_H = \frac{p_H}{\varrho_0 D} \tag{2.9}$$

$$\varrho_H = \varrho_0 \frac{D}{D - w_H} \tag{2.10}$$

gdzie: D - prędkość czoła fali detonacyjnej.

Równania (2.1) do (2.4) i (2.8) oraz wartości podane w tabelach 1 i 2 pozwalają opisać w pełni ruch i parametry produktów detonacji podstawowych, skondensowanych materiałów wybuchowych.

2.2. Teoria sprężysto/lepko-plastyczności w zastosowaniu do modelowania deformacji i napędzania metalowych wkładek kumulacyjnych.

W pracy niniejszej zostanie omówiona aktualna i zarazem dość ogólna wersja modelu opisującego zachowanie się wkładki kumulacyjnej w procesie jej deformacji i napędzania. Pozwoliła ona na osiągnięcie zgodności wyników teoretycznych z eksperymentalnymi w takim stopniu, iż można uznać eksperyment komputerowy za praktycznie równoważny eksperymentowi fizycznemu. Wersja ta bazuje na modelu ciała sprężysto/lepko-plastycznego typu Hohenemsera-Pragera. Odpowiedni układ równań różniczkowych wyrażający prawa zachowania i związki

Tabela 2. Parametry materiałów wybuchowych w punkcie C-J.

Nazwa MW	p_H [Mbar]	$\varrho_0 \varepsilon_0$ [Mbar]	D [km/s]
komp. A-3	0.300	0.0890	8.300
komp. B	0.295	0.0850	7.980
komp. C-4	0.280	0.0900	8.193
Cyklotol 77/23	0.320	0.0920	8.250
HMX	0.420	0.1050	9.110
LX-01	0.155	0.0610	6.840
LX-04-1	0.340	0.0950	8.470
LX-07	0.355	0.1000	8.640
LX-09-1	0.375	0.1050	8.840
LX-10-1	0.375	0.1040	8.820
LX-11	0.330	0.0900	8.320
LX-14-0	0.370	0.1020	8.800
LX-17-0	0.300	0.0690	7.600
Oktol 78/22	0.342	0.0960	8.480
PBX-9010	0.340	0.0900	8.390
PBX-9011	0.340	0.0890	8.500
PBX-9404-3	0.370	0.1020	8.800
PBX-9407	0.265	0.0860	7.910
Pentolit 50/50	0.255	0.0810	7.530
PETN	0.062	0.0502	5.170
PETN	0.140	0.0719	6.540
PETN	0.220	0.0856	7.450
PETN	0.335	0.1010	8.300
Tetryl	0.285	0.0820	7.910
TNT	0.210	0.0700	6.930
Nitrometan	0.125	0.0510	6.280

konstytutywne dla tego modelu ma następującą postać [93,94,95,96,97,98,99]:

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \vec{w} = 0 \tag{2.11}$$

$$\varrho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} + \frac{S_{rr} - S_{\varphi\varphi}}{r} \tag{2.12}$$

$$\varrho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} + \frac{S_{rz}}{r} \tag{2.13}$$

$$\varrho \frac{d\varepsilon}{dt} = -p \operatorname{div}\vec{w} + S_{rr}\frac{\partial u}{\partial r} + S_{\varphi\varphi}\frac{u}{r} + S_{zz}\frac{\partial v}{\partial z} + S_{rz}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r}\right) \tag{2.14}$$

$$\frac{dS_{rr}}{dt} = 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\vec{w}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r}\right)S_{rz} - \frac{\mu}{\eta}\phi S_{rr} \tag{2.15}$$

$$\frac{dS_{\varphi\varphi}}{dt} = 2\mu\left(\frac{u}{r} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\vec{w}\right) - \frac{\mu}{\eta}\phi S_{\varphi\varphi} \tag{2.16}$$

$$\frac{dS_{zz}}{dt} = 2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\vec{w}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r}\right)S_{rz} - \frac{\mu}{\eta}\phi S_{zz} \tag{2.17}$$

$$\frac{dS_{rz}}{dt} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r}\right)\left(S_{rr} - S_{zz}\right) - \frac{\mu}{\eta}\phi S_{rz} \tag{2.18}$$

gdzie

$$\phi = \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\, Y/\sqrt{S_{ij}S_{ij}} & \text{dla } \sqrt{\frac{2}{3}}\, Y \leq \sqrt{S_{ij}S_{ij}} \\ 0 & \text{dla } \sqrt{\frac{2}{3}}\, Y > \sqrt{S_{ij}S_{ij}} \end{cases} \tag{2.19}$$

$$S_{ij}S_{ij} = S_{rr}^2 + S_{\varphi\varphi}^2 + S_{zz}^2 + 2 S_{rz}^2 \tag{2.20}$$

Oznaczenia:

S_{ij} - składowe dewiatora tensora naprężeń ($\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + S_{ij}$).

Y - dynamiczna granica plastycznego płynięcia,

μ - moduł ścinania,

η - współczynnik lepkości.

Pozostałe oznaczenia sa analogiczne jak w punkcie 2.1. Równanie stanu uzupełniające ten model przyjęto w następującej postaci [100] (tzw. model EOS):

$$p = k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \gamma_o \varrho_o \varepsilon \tag{2.21}$$

gdzie:

$$x = 1 - \frac{\varrho_o}{\varrho_s} \; ; \qquad k_2 = 0 \qquad \text{dla } x<0 \; ;$$

a ϱ_s oznacza gęstość fazy ciałostałowej, która będzie dokładnie zdefiniowana w punkcie 2.3.

Współczynniki k_1, k_2, k_3, ϱ_o i γ_o dla kilkunastu metali zebrano i przedstawiono w tabeli nr.3.

Tabela 3. Współczynniki równań stanu dla modelu EOS.

Metal	k_1 [Mbar]	k_2 [Mbar]	k_3 [Mbar]	ϱ_o [g/cm³]	γ_o
Aluminium	0.7906	1.3250	2.1300	2.78	2.00
Złoto	1.7970	2.9810	4.9320	19.24	2.97
Beryl	1.1840	1.9750	2.9440	1.85	1.16
Miedź	1.3860	2.7490	5.1130	8.93	1.99
Magnez	0.3511	0.6376	1.0510	1.74	1.42
Niob	1.6910	2.8390	4.3900	8.59	1.47
Nikiel	1.8790	3.5880	6.4300	8.87	1.93
Ołów	0.4774	0.7329	1.1220	11.35	2.77
Platyna	2.7730	5.2350	9.5560	21.42	2.40
Stal	1.6480	3.1240	5.6490	7.90	2.17
Tantal	1.9410	3.1100	4.6690	16.65	1.60
Tytan	1.2340	1.2200	1.1460	4.53	1.09
Uran	1.1720	2.3680	4.535	18.95	2.20
Wolfram	3.1210	5.3180	8.3800	19.22	1.54

Model EOS pozwala również wyznaczyć temperaturę metalu z zależności:

$$T = \frac{\varepsilon - \varepsilon_o}{3R} \; [K] \tag{2.22}$$

gdzie:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{00} + \varepsilon_{01} x + \varepsilon_{02} x^2 + \varepsilon_{03} x^3 + \varepsilon_{04} x^4 \qquad (2.23)$$

a stała R wyraża się przez ε_{00}:

$$R = -\frac{\varepsilon_{00}}{900} \qquad (2.24)$$

Wartości odpowiednich współczynników: $\varepsilon_{00}, \varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}, \varepsilon_{03}, \varepsilon_{0}$ podano w tabeli nr 4 dla tych samych metali, które uwzględniono w tabeli nr.3.

Tabela 4. Wartości współczynników do obliczania temperatur metali w/g modelu EOS.

Metal	$\varepsilon_{00} \cdot 10^3$	$\varepsilon_{01} \cdot 10^3$	$\varepsilon_{02} \cdot 10^2$	$\varepsilon_{03} \cdot 10^2$	$\varepsilon_{04} \cdot 10$
Aluminium	-2.773	-5.547	13.640	24.950	3.160
Złoto	-0.380	-1.128	4.502	9.622	1.355
Beryl	-8.303	-9.632	31.430	47.720	5.360
Miedź	-1.178	-2.344	7.529	15.260	2.190
Magnez	-3.078	-4.371	9.779	16.840	2.107
Niob	-0.805	-1.184	9.761	15.810	1.859
Nikiel	-1.275	-2.460	10.350	20.140	2.783
Ołów	-0.361	-1.000	1.965	3.966	0.522
Platyna	-0.384	-0.921	6.362	13.240	1.910
Stal	-1.340	-2.908	10.120	20.510	2.901
Tantal	-0.414	-0.662	5.775	9.304	1.703
Tytan	-1.562	-1.703	13.530	13.900	1.011
Uran	-0.314	-0.692	3.017	6.377	0.949
Wolfram	-0.407	-0.627	8.068	13.360	1.604

Wartości współczynników ε_{0i} wyrażono w jednostkach $\frac{\text{Mbar.cm}^3}{\text{g}}$.

Do opisu własności wytrzymałościowych metalowych wkładek kumulacyjnych wykorzystano ogólny model Steinberga-Guinana,

który uwzględnia zależności Y i μ od deformacji plastycznej, ciśnienia, temperatury i gęstości [100]. Zależności te skonstruowano przy prędkościach deformacji charakterystycznych dla procesów oddziaływania fal detonacyjnych na ciała stałe, a ich postać jest następująca:

$$Y = Y_0 (1 + \beta \varepsilon^P)^n \left[1 + bp\left(\frac{\rho_0}{\rho_s}\right)^{1/3} - h(T - 300)\right] \qquad (2.25)$$

$$Y_0 (1 + \beta \varepsilon^P)^n \leqslant Y_{max} \qquad (2.26)$$

$$Y = 0 \quad \text{dla} \quad T > T_m \qquad (2.27)$$

$$\mu = \mu_0 \left[1 + bp\left(\frac{\rho_0}{\rho_s}\right)^{1/3} - h(T - 300)\right] \qquad (2.28)$$

$$T_m = T_{m0}\left(\frac{\rho_0}{\rho_s}\right)^{2/3} \exp\left[2\gamma_0\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_s}\right)\right] \qquad (2.29)$$

$$\varepsilon^P = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon^P_{rr} - \varepsilon^P_{zz})^2 + (\varepsilon^P_{rr} - \varepsilon^P_{\varphi\varphi})^2 + (\varepsilon^P_{zz} - \varepsilon^P_{\varphi\varphi})^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon^P_{rz})^2} \qquad (2.30)$$

$$\frac{d\varepsilon^P_{ik}}{dt} = \frac{1}{2\eta}\phi S_{ik} \qquad (2.31)$$

gdzie: ε^P – intensywność deformacji plastycznej.

Wartości odpowiednich współczynników dla metali wyszczególnionych w tabelach nr 3 i 4 podano w tabelach nr 5 i 6.

W chwili obecnej nie można znaleźć w literaturze równie ogólnych i dobrze udokumentowanych zależności dla współczynnika lepkości η. Dlatego też zaproponowano, aby w badaniach własnych uwzględnić jedynie najsilniejszą zależność odpowiedniego czasu relaksacji $\tau = \frac{\eta}{\mu}$ od temperatury [29].

Wówczas współczynnik lepkości będzie dany wyrażeniem:

$$\eta = \eta_0 F(T)\left[1 + bp\left(\frac{\rho_0}{\rho_s}\right)^{1/3} - h(T - 300)\right] \qquad (2.32)$$

Wartość η_0 oraz postać funkcji $F(T)$ dobierano na podstawie własnych badań teoretyczno-eksperymentalnych wykorzystując w tym celu zjawisko "odwrotnej kumulacji".

Okazało się, że najlepsze wyniki uzyskano przyjmując postać funkcji $F(T)$ analogiczną do tej, która opisuje lepkość płynnych metali. Do podobnych wniosków doszli autorzy pracy [101], badając zachowanie się ośrodków porowatych.

Tabela 5. Współczynniki występujące w modelu Steinberga-Guinana.

Metal	$Y_0 \cdot 10^3$ [Mbar]	$Y_{max} \cdot 10^2$ [Mbar]	$\mu_0 \cdot 10$ [Mbar]	T_{m_0} [K]
Aluminium	2.90	0.68	2.76	1220
Złoto	0.20	0.23	2.80	1970
Beryl	3.30	1.20	15.10	1820
Miedź	1.20	0.60	4.77	1790
Magnez	1.70	0.50	1.65	1570
Niob	8.00	1.40	3.77	1750
Nikiel	1.40	1.20	8.55	1950
Ołów	0.08	0.10	0.86	2740
Platyna	0.30	0.30	6.37	2870
Stal	3.40	2.00	7.70	1930
Tantal	7.70	1.10	6.90	1740
Tytan	7.10	1.50	4.34	1230
Uran	8.00	1.70	8.44	2420
Wolfram	22.00	4.00	16.00	1670

Tak więc, dla miedzianych wkładek kumulacyjnych, przyjmowano:

$$\left. \begin{aligned} F(T) &= \exp\left(\frac{4380}{T}\right) \\ \eta_0 &= 5 \cdot 10^{-2} \; [P] \end{aligned} \right\} \qquad (2.33)$$

Tabela 6. Współczynniki występujące w modelu Steinberga-Guinana, cd.

Metal	β	n	$b\,[Mbar^{-1}]$	$h\left[\frac{1}{K}\right] \cdot 10^4$
Aluminium	125	0.10	8	6.2
Złoto	49	0.39	4	3.2
Beryl	81	0.22	2	2.6
Miedź	36	0.45	3	3.8
Magnez	7000	0.10	10	4.8
Niob	5	0.20	1.4	0.0
Nikiel	46	0.53	2	3.4
Ołów	110	0.52	14	12.0
Platyna	20000	0.0002	3	1.4
Stal	40	0.35	3	4.5
Tantal	10	0.10	2	1.3
Tytan	780	0.065	1	6.2
Uran	2.7	0.26	1	8.1
Wolfram	7.7	0.13	1	1.4

Dla pozostałych metali wzór typu (2.33) musi być konstruowany na drodze dodatkowych badań teoretyczno-eksperymentalnych.

Przytoczone w tym punkcie równania oraz opis własności materiałowych zamykają problem matematyczno-fizycznego opisu dynamicznych deformacji metali obciążanych materiałami wybuchowymi, w obszarach, w których pozostają one litymi ciałami stałymi lub cieczami. Poprawny jakościowo i ilościowo opis obszarów, w których tworzą się szczeliny (pustki), wymaga jeszcze dalszej rozbudowy tego modelu, czemu poświęcony będzie następny punkt 2.3.

2.3. Model tworzenia się i wzrostu szczelin w deformowanych wkładkach kumulacyjnych.

Wyniki badań eksperymentalnych wskazują, że szereg zjawisk towarzyszących procesom kumulacji będzie bardzo trudno opisać w ramach klasycznej mechaniki ośrodków ciągłych.

Można do nich zaliczyć: rozdzielanie się materiału wkładki na strumień i zbitek, odrywanie się strumienia od zbitka, fragmentacja strumienia, fragmentacja brzegów wkładek kumulacyjnych, rozrywanie się nieoptymalnie zaprojektowanych wybuchowo kształtowanych pocisków, itp. Adekwatny do rzeczywistości opis matematyczno-fizyczny musi stwarzać możliwości modelowania tych efektów, które wiążą się z powstawaniem mikro jak i makro nieciągłości ośrodka. Nieciągłości te przyjęto nazywać szczelinami gdy tworzą one wydłużone magistrale pęknięć lub pustkami (porami), gdy ich geometryczne kształty są bardziej regularne, np. zbliżone do sfer lub elipsoid.

Zdecydowana większość prac dotycząca tej problematyki koncentruje się wokół zagadnień powstawania i rozprzestrzeniania się pojedyńczych szczelin. Z reguły traktuje się je jak wolne od naprężeń powierzchnie w odpowiednim problemie brzegowym fizyki matematycznej. Warunki progowe na powstawanie i wzrost szczelin określa się zwykle przez podanie krytycznych wartości energii, intensywności naprężeń lub odkształceń. Podejście takie ma już w chwili obecnej dość bogatą literaturę (np. [102÷108]), ale niestety nie jest ona zbyt pomocną przy komputerowym modelowaniu złożonych, niewyidealizowanych problemów. Wynika to z dwóch zasadniczych powodów.

Po pierwsze, śledzenie rozwoju pojedyńczej szczeliny i odpowiednie jej modelowanie wymaga skomplikowanych zabiegów rozdzielania siatki numerycznej i tworzenia nowych brzegów wewnątrz rozważanego obszaru. Przedsięwzięcia takie stają się szybko nierealne technicznie jeśli liczba niezależnych szczelin

zaczyna wzrastać lub też kierunki ich rozprzestrzeniania się stają się niezgodne z układem węzłów sieci numerycznej.

Po drugie, w świetle nowszych badań [109,110] zagadnienia niszczenia struktury plastycznych metali (miedź, żelazo armco, aluminium) nie można sprowadzić tylko do analizy propagacji makroszczelin. Proces zniszczenia zapoczątkowują bowiem licznie powstające, niezależne mikropęknięcia różnych kształtów i rozmiarów, chaotycznie zapełniające niszczony obszar. Dopiero w późniejszych fazach zjawiska, na skutek łączenia się mikropęknięć, powstają makroszczeliny. Bardzo istotny jest przy tym fakt, że powstające mikropęknięcia mogą silnie zmieniać własności wytrzymałościowe ośrodka w dość znacznych obszarach.

Dlatego też przy modelowaniu komputerowym wielowymiarowych, złożonych procesów z uwzględnieniem niszczenia struktury metali, podejście polegające na śledzeniu rozwoju pojedyńczych makroszczelin jest rzadko stosowane [32] i należy uznać je za nieperspektywiczne z wymienionych wyżej technicznych i fizycznych powodów.

W chwili obecnej zaczyna dominować w tej dziedzinie inny sposób opisu powstawania i wzrostu objętości zarówno mikro jak i makroszczelin. Mówiąc ogólnie, polega on na tym, że bez wnikania w strukturę pojedyńczych szczelin, ocenia się jedynie ich średnią objętość w danym elemencie ośrodka i w zależności od niej modyfikuje mechaniczne właściwości metali.

Najprostszy model tego typu przedstawiono w pracy [111]. Sprowadza się on do formalnego ograniczenia: ciśnienia, granicy plastycznego płynięcia i modułu ścinania w obszarach, w których gęstość spada poniżej pewnej krytycznej wartości. Podejście takie ma charakter statyczny i zapewnia jedynie, że zmiany tych wielkości odbywają się w fizycznie uzasadnionych granicach, gdy w ośrodku zaczynają powstawać szczeliny. Ze względu na swą prostotę sposób ten był wykorzystywany w początkowych etapach niniejszej pracy [3].

Bardziej zaawansowane, dynamiczne modele przedstawiono w pracach [42÷46,92,101,109,110,112]. Niestety, prace te pojawiły się stosunkowo niedawno i nie doszło jeszcze do

określonego ujednolicenia poglądów w tej problematyce. Równania opisujące dynamikę wzrostu objętości szczelin oraz ich wpływ na własności wytrzymałościowe metali różnią się u poszczególnych autorów zarówno formą jak i wartościami liczbowymi odpowiednich współczynników.

W tej sytuacji zdecydowano się na zaadoptowanie podejścia przedstawionego w pracach [44,45], ze względu na jego dość szeroką i zakończoną pozytywnymi rezultatami weryfikacją eksperymentalną (dla żelaza armco i aluminium). Okazało się później, że wybór ten był dość trafny, a odpowiednie współczynniki liczbowe dla miedzi znaleziono w oparciu o własne prace teoretyczno-eksperymentalne.

Układ równań opisujący dynamikę powstawania i wzrostu objętości szczelin przyjęto więc w następującej postaci:

$$\frac{dV_c}{dt} = -k\,\mathrm{sign}(p)\left[|p| - \sigma_0 \frac{V_{c1}}{V_c + V_{c1}}\right](V_c + V_{co}) \qquad (2.34)$$

dla $|p| > \sigma_0 \dfrac{V_{c1}}{V_c + V_{c1}}$

$$\frac{dV_c}{dt} = 0 \qquad \text{dla} \qquad |p| < \sigma_0 \frac{V_{c1}}{V_c + V_{c1}} \qquad (2.35)$$

Znajomość objętości szczelin pozwala łatwo wyliczyć gęstość fazy ciałostałowej ośrodka z relacji:

$$\frac{1}{\rho} = V_c + \frac{1}{\rho_s} \qquad (2.36)$$

gdzie: V_c - objętość szczelin w jednostce masy ośrodka,
ρ - gęstość średnia,
ρ_s - gęstość fazy ciałostałowej.

Wartości stałych współczynników dla miedzi wynoszą:

$$K = 0.01\ \frac{cm^2}{dyn \cdot s}; \qquad \sigma_0 = 7 \cdot 10^9\ \frac{dyn}{cm^2};$$

$$V_{co} = 10^{-6}\ \frac{cm^3}{g}; \qquad V_{c1} = 3 \cdot 10^{-3}\ \frac{cm^3}{g};$$

stała V_{co} ma sens fizyczny początkowej objętości szczelin w niezaburzonym metalu.

Wyrażenie $\sigma_0 \frac{V_{c1}}{V_c + V_{c1}}$ określa wartość progową średniego naprężenia, po przekroczeniu którego objętość szczelin rośnie ($p<0$) lub maleje ($p>0$).

Ze związku (2.36) wynika, że w obszarach, w których powstały szczeliny ($V_c \neq 0$), ośrodek ma strukturę dwufazową - jego objętość właściwa jest sumą objętości właściwej szczelin i ciała stałego. W takim ośrodku równanie stanu i model Steinberga mogą opisywać tylko stan fazy ciałostałowej. Dlatego też ciśnienie oraz wielkości takie, jak: Y, μ i η należy uzależnić tylko od gęstości fazy ciałostałowej ρ_s, a nie od gęstości średniej ρ (uwzględniono to już w zależnościach podanych w punkcie 2.2).

Jak już wcześniej wspomniano pojawiające się szczeliny modyfikują własności wytrzymałościowe ośrodka. W modelu matematyczno-fizycznym można ten efekt uwzględnić wprowadzając odpowiednie ograniczenia wielkości Y, μ i η w zależności od objętości szczelin. Ośrodek ze szczelinami będą wówczas charakteryzować efektywne wielkości Y^T, μ^T i η^T, wyliczane następująco:

$$Y^T = Y \cdot G(V_c); \quad \mu^T = \mu \cdot G(V_c); \quad \eta^T = \eta \cdot G(V_c); \qquad (2.37)$$

Dla miedzi przyjęto:

$$G(V_c) = \exp(-7\rho V_c) \qquad (2.38)$$

Postać funkcji $G(V_c)$ określono w oparciu o własne badania teoretyczno-eksperymentalne, gdyż żadna z literaturowych postaci $G(V_c)$ nie dawała dostatecznie zadowalających rezultatów. Stosunkowo najbliższe propozycji określonej wzorem (2.38), są funkcje $G(V_c)$ podane przez autorów prac [42] i [45].

Znajomość objętości szczelin w poszczególnych elementach ośrodka jest również bardzo pomocną przy formułowaniu kryteriów fragmentacji ciał na niezależne części. Do problemu tego wrócimy w rozdziale 4, gdyż łatwiej jest go dyskutować na bazie rozwiązań konkretnych problemów.

2.4. Warunki początkowo-brzegowe.

Warunki początkowe opisujące niezaburzony stan wkładki kumulacyjnej sprowadzają się do przyjęcia w chwili początkowej następujących wartości zmiennych zależnych:

$$\varrho(r,z,0) = \varrho_0 \; ; \quad u(r,z,0) = 0 \; ; \quad v(r,z,0) = 0 \; ;$$
$$\varepsilon(r,z,0) = 0 \; ; \quad \sigma_{ik}(r,z,0) = 0 \; ; \quad \varepsilon_{ik}(r,z,0) = 0 \; , \tag{2.39}$$
$$V_c(r,z,0) = 0$$

Przy pomocy kodu komputerowego, który będzie omówiony w następnym rozdziale, można rozwiązywać szeroką gamę różnych problemów brzegowych. Dlatego też warunki brzegowe należy sformułować dość ogólnie, abstrahując od konkretnych przykładów.

Tak więc na wszystkich swobodnych powierzchniach wkładki $f_1(r,z,t) = 0$, przyjmujemy:

$$\sigma_n(r,z,t)\Big|_{f_1(r,z,t)=0} = 0 \; ; \qquad \sigma_\tau(r,z,t)\Big|_{f_1(r,z,t)=0} = 0 \tag{2.40}$$

gdzie: σ_n i σ_τ oznaczają odpowiednio naprężenia normalne i styczne do powierzchni wkładki.

Natomiast na powierzchniach swobodnych produktów detonacji - $f_2(r,z,t) = 0$, mamy:

$$p(r,z,t)\Big|_{f_2(r,z,t)=0} = 0 \tag{2.41}$$

Na powierzchni kontaktu: produkty detonacji - wkładka kumulacyjna, zakładano warunek tzw. swobodnego poślizgu:

$$\left. \begin{aligned} & p(r,z,t) = -\sigma_n(r,z,t)\Big|_{f_3(r,z,t)=0} \\ & \sigma_\tau(r,z,t)\Big|_{f_3(r,z,t)=0} = 0 \\ & u_{n1}(r,z,t) = u_{n2}(r,z,t)\Big|_{f_3(r,z,t)=0} \end{aligned} \right\} \tag{2.42}$$

gdzie: $f_3(r,z,t)=0$ - równanie powierzchni kontaktowej,
u_{n1}, u_{n2} - normalne do powierzchni kontaktu, składowe prędkości masowych wkładki i produktów detonacji.

Zgodnie z przyjętą metodą opisu procesów detonacji MW, propagujący się front fali detonacyjnej jest modelowany powierzchnią silnej nieciągłości o zadanym kształcie i prędkości przemieszczania się. Na powierzchni tej zakłada się, że odpowiednie zmienne zależne przyjmują wartości odpowiadające punktowi C-J:

$$\varrho = \varrho_H \; , \quad \varepsilon = \varepsilon_H \; , \quad p = p_H \; , \quad u = u_H \; , \quad v = v_H \tag{2.43}$$

Wielkości u_H i v_H należy w każdym punkcie dobierać tak, aby wypadkowy wektor prędkości $\vec{w}_H(u_H, v_H)$ był skierowany normalnie do powierzchni frontu.

Warunki początkowo-brzegowe zamykają sformułowany w punktach 2.1 ÷ 2.3 matematyczno-fizyczny opis problemu.

Rozdział 3

STRUKTURA I PODSTAWOWE ELEMENTY KODU NUMERYCZNEGO DO ANALIZY SPRZĘŻONYCH PROCESÓW DETONACJI, DEFORMACJI I NAPĘDZANIA CIAŁ.

Złożoność sformułowanych w poprzednim rozdziale równań problemu sprawia, że nie dają się one rozwiązywać metodami analitycznymi. Szansę na uzyskanie przybliżonych rozwiązań tyc równań stwarzają jedynie metody fizyki komputerowej, do któryc zalicza się również metoda, która będzie omówiona w niniejszym rozdziale. Szersze omówienie tej metody jest podyktowane tym, że nie ma ona swoich bezpośrednich odpowiedników literaturowych, a rozwiązania poszczególnych problemów mają własny, oryginalny charakter.

Przy analizach numerycznych złożonych procesów fizycznych (zwanych często symulacjami komputerowymi) osobnym problemem staje się ocena poprawności otrzymywanych wyników. W naszym przypadku, wielowymiarowość zagadnienia oraz nieliniowość układów równań powodują, że udowodnienie analitycznymi metodam stabilności lub zbieżności schematu różnicowego jest praktycznie niemożliwe. Jedynym, praktycznym sposobem oceny poprawności wyników, jest w takim przypadku konfrontacja wyników symulacji komputerowej ze znanymi rozwiązaniami niektórych szczegółowych problemów lub wprost z wynikami eksperymentów. Konfrontacje tego typu pokazały, że proponowana metoda oddaje poprawnie zarówno jakościowe jak i ilościowe charakterystyki wszystkich dotychczas analizowanych zjawisk. Przejdźmy więc do jej bezpośredniego scharakteryzowania od strony ideowej i częściowo realizacyjnej.

3.1. Idea proponowanej metody numerycznej.

Wspólną cechą typowych algorytmów wykorzystujących współrzędne Lagrange'a lub Eulera jest to, że tworzona tam sie

numeryczna dzieli ośrodek na poszczególne komórki, w których przeprowadza się odpowiednie bilanse masy, pędu i energii. Na ich podstawie określa się następnie wartości poszukiwanych zmiennych zależnych.

Proponowana metoda różni się od tych metod dość zasadniczo już na etapie tworzenia samego pojęcia sieci numerycznej. Zakłada się w niej bowiem, że specyficzną sieć numeryczną tworzą, odpowiednio wybrane w chwili początkowej punkty materialne, przemieszczające się wraz z ośrodkiem. Rozwiązanie numeryczne sprowadza się w takim przypadku do obliczania w kolejnych chwilach czasu położeń i wartości zmiennych zależnych w tych punktach. Tak więc, bilanse odpowiednich wielkości w poszczególnych "komórkach", zastępuje się w tej metodzie obliczaniem trajektorii i parametrów punktów materialnych. Punkty te w proponowanej metodzie nie tworzą trwałego sąsiedztwa, tak jak to ma miejsce na przykład dla węzłów sieci Lagrange'a. Mogąc dowolnie zmieniać położenia względem siebie, punkty te tworzą specyficzną, zmieniającą się w czasie i przestrzeni sieć z "wymiennymi" węzłami. Ta "wymienność" węzłów pozwala na modelowanie dowolnie dużych deformacji ośrodka. Jest to podstawowa zaleta tej metody, którą można by opisowo określić jako: metodę Lagrange'a przystosowaną do obliczeń w warunkach bardzo dużych deformacji.

Przejdźmy zatem do omówienia konkretnej realizacji takiej metody. Załóżmy, że badane ciało zostało pokryte siecią punktów materialnych, w których znane są wszystkie wartości zmiennych zależnych w chwili czasu t^n. Wybierzmy jeden z takich punktów i przyporządkujmy mu parę liczb całkowitych (L, K), która będzie go identyfikować. Liczby L i K można utożsamić z lagrange'owskimi współrzędnymi danego punktu. Zgodnie z tymi oznaczeniami położenie punktu (L, K) na płaszczyźnie (r, z) w chwili t^n opisuje para liczb $(r^n_{L,K}, z^n_{L,K})$, a wartości zmiennych zależnych w tym punkcie opisują odpowiednio wielkości typu $-(F_i)^n_{L,K}$. Położenia punktów tworzących lokalne sąsiedztwo punktu (L, K) oznaczymy następująco: (r^n_m, z^n_m);

$1 \leq m \leq N$. Wskaźnik "m" numeruje punkty sąsiednie, a "N" określa ich liczbę. Wartości zmiennych zależnych w punktach sąsiednich można analogicznie oznaczyć $-(F_i)^n_m$. Elementarny i zarazem podstawowy problem sprowadza się teraz do odpowiedzi na pytanie: w jaki sposób po upływie czasu Δt ($t^{n+1} - t^n = \Delta t$) obliczyć położenie i nowe wartości zmiennych zależnych w punkcie (L,K) ?. Zauważmy w tym celu, że równania problemu można przedstawić w następującej ogólnej postaci:

$$\frac{dF_i}{dt} = G_i\left(x_K, F_j, \frac{\partial F_j}{\partial x_K}\right) \tag{3.1}$$

gdzie: $i, j = 1, 2 \dots M$; $K = 1, 2$;

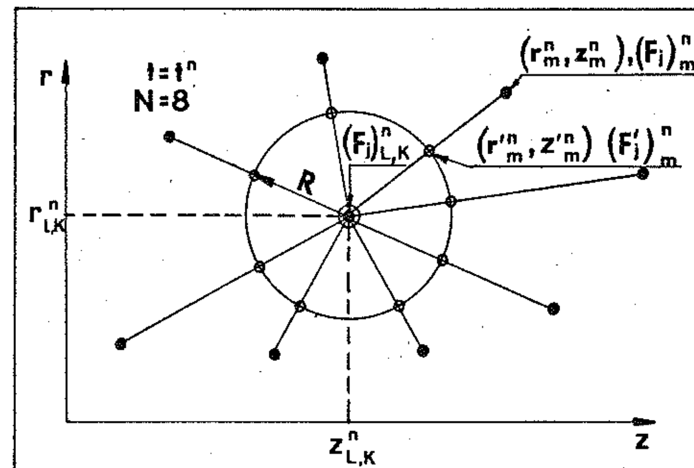
$x_1 = r$; $x_2 = z$;

a M jest liczbą zmiennych zależnych. Pochodna substancjalna $\frac{d}{dt}$ opisuje jak wiadomo zmianę parametrów w poruszającej się cząstce materialnej, a więc forma zapisu równań typu (3.1) sugeruje już częściową odpowiedź na powyższe pytanie. Można bowiem wartość funkcji F_i w punkcie (L,K) w chwili t^{n+1} wyliczyć następująco:

$$\frac{(F_i)^{n+1}_{L,K} - (F_i)^n_{L,K}}{\Delta t} = (G_i)^n_{L,K} \tag{3.2}$$

Postać prawej strony równania (3.2) świadczy o tym, że zdecydowano się na wybór prostego, jawnego schematu numerycznego. Na początku pracy wykorzystywano również bardziej złożone, wielokrokowe typy schematów [3]. Okazało się jednak, że im bardziej złożone zagadnienia trzeba rozwiązywać, tym coraz bardziej problematyczne staje się korzystanie z "dokładniejszych" schematów. Z jednej bowiem strony, w złożonych, wielowymiarowych problemach symulacyjnych zatraca sie możliwość subtelnej oceny dokładności schematów, a z drugiej strony owe "dokładniejsze" schematy mogą zbytnio komplikować cały algorytm i czynić go mniej efektywnym.

Aby skorzystać z równania (3.2) musimy umieć wyliczyć funkcję $(G_i)^n_{L,K}$, a nie jest to problem taki prosty, gdyż w punkcie (L,K) nie znamy gradientów $\frac{\partial F_i}{\partial x_K}$. Dysponujemy jedynie informacjami o wartościach funkcji F_j w dyskretnych, nieregularnie rozłożonych wokół punktu (L,K) punktach sąsiednich (r^n_m , z^n_m). W pracy niniejszej zaproponowano następujący sposób obliczania gradientów $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_K}\right)^n_{L,K}$, który można prześledzić posługując się rysunkiem nr 8.



Rys. 8. Przykładowa ilustracja położeń: punktu obliczanego ($r^n_{L,K}$, $z^n_{L,K}$), punktów sąsiednich (r^n_m, z^n_m) i punktów sąsiednich interpolowanych (r'^n_m, z'^n_m).

Parametry i położenia nieregularnie rozłożonych punktów sąsiednich interpolujemy liniowo na okrąg o promieniu R, którego środkiem jest punkt (L,K). Położenia i parametry w punktach interpolowanych można łatwo wyznaczyć:

$$\alpha_R = \frac{R}{\sqrt{(r^n_m - r^n_{L,K})^2 + (z^n_m - z^n_{L,K})^2}} \tag{3.3}$$

$$r'^n_m = r^n_{L,K} + (r^n_m - r^n_{L,K})\alpha_R \qquad (3.4)$$

$$z'^n_m = z^n_{L,K} + (z^n_m - z^n_{L,K})\alpha_R \qquad (3.5)$$

$$(F'_j)^n_m = (F_j)^n_{L,K} + \left[(F_j)^n_m - (F_j)^n_{L,K}\right]\alpha_R \qquad (3.6)$$

Promień R wygodnie jest dobierać tak aby był on bliski średniej odległości między punktem (L,K), a punktami sąsiednimi. Jest on w tym schemacie niejako równoważny klasycznemu krokowi przestrzennemu. Interpolacja (3.3) ÷ (3.6) ma na celu nadanie wszystkim punktom sąsiednim tej samej "wagi" względem punktu obliczanego.

Przyjmijmy dalej, że funkcję F'_j można wokół punktu (L,K) lokalnie zaaproksymować funkcją liniową:

$$F_j^n(r,z) = (F_j)^n_{L,K} + a(r - r^n_{L,K}) + b(z - z^n_{L,K}) \qquad (3.7)$$

Współczynniki a i b można dobrać tak, aby płaszczyzna (3.7) możliwie najlepiej aproksymowała znany, dyskretny rozkład wartości funkcji $(F_j')^n_m$.

Utwórzmy w tym celu wyrażenie:

$$A(a,b) = \sum_{m=1}^{N}\left[F_j^n(r'^n_m, z'^n_m) - (F'_j)^n_m\right]^2 \qquad (3.8)$$

Wyrażenie to jest sumą kwadratów różnic między wartościami funkcji $(F_j')^n_m$ w punktach (r'^n_m, z'^n_m), a wartościami jakie w tych punktach wynikają z wyrażenia (3.7). Aby różnice te były najmniejsze, musi zachodzić:

$$\frac{\partial A(a,b)}{\partial a} = 0 \qquad (3.9)$$

$$\frac{\partial A(a,b)}{\partial b} = 0 \qquad (3.10)$$

Wprowadzając następujące oznaczenia:

$$\alpha_1 = \sum_{m=1}^{N}(r'^n_m - r^n_{L,K})^2 \qquad (3.11)$$

$$\alpha_2 = \sum_{m=1}^{N}(r'^n_m - r^n_{L,K})(z'^n_m - z^n_{L,K}) \qquad (3.12)$$

$$\alpha_3 = \sum_{m=1}^{N}(z'^n_m - z^n_{L,K})^2 \qquad (3.13)$$

$$\delta_1 = \sum_{m=1}^{N}\left[(F_j)^n_{L,K} - (F'_j)^n_m\right](r'^n_m - r^n_{L,K}) \qquad (3.14)$$

$$\delta_2 = \sum_{m=1}^{N}\left[(F_j)^n_{L,K} - (F'_j)^n_m\right](z'^n_m - z^n_{L,K}) \qquad (3.15)$$

dostajemy z (3.9) i (3.10)

$$a = \frac{\delta_1\alpha_3 - \delta_2\alpha_2}{\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_3} \qquad (3.16)$$

$$b = \frac{\delta_2\alpha_1 - \delta_1\alpha_2}{\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_3} \qquad (3.17)$$

Z (3.7) wynika bezpośrednio, że poszukiwane pochodne przestrzenne są równe:

$$\left(\frac{\partial F_j}{\partial r}\right)^n_{L,K} = a\,; \qquad \left(\frac{\partial F_j}{\partial z}\right)^n_{L,K} = b\,; \qquad (3.18)$$

Przedstawiony sposób oceny gradientów wokół punktu obliczanego jest niezawodny w praktyce numerycznej, tzn. nie daje nigdy niefizycznych wielkości gradientów. Jedynym warunkiem jaki musi być przy tym spełniony jest odpowiednia gęstość kątowych rozkładów punktów sąsiednich, co będzie szerzej omówione w następnych punktach.

Z (3.2) możemy już teraz bezpośrednio wyliczyć wszystkie interesujące nas wartości zmiennych zależnych w punkcie (L,K) w chwili t^{n+1}:

$$(F_i)^{n+1}_{L,K} = (F_i)^n_{L,K} + \Delta t\left[G_i\left(x_K, F_j, \frac{\partial F_j}{\partial x_K}\right)\right]^n_{L,K} \qquad (3.19)$$

Nowe położenie punktu (L,K) wyznacza się następująco:

$$r^{n+1}_{L,K} = r^{n}_{L,K} + u^{n}_{L,K} \cdot \Delta t \tag{3.20}$$

$$z^{n+1}_{L,K} = z^{n}_{L,K} + v^{n}_{L,K} \cdot \Delta t \tag{3.21}$$

Okazało się jednakże, że tak pomyślany schemat numeryczny jest niestabilny, tzn. generuje on szybko narastające niefizyczne fluktuacje w wyniku czego szybko rozpada się całe rozwiązanie. Fluktuacje te jest bardzo trudno wyeliminować tak aby równocześnie nie dochodziło do zbytniego, numerycznego wygładzania rozwiązań. W wyniku wielu badań znaleziono ostatecznie postać tzw. "zewnętrznej ,nielokalnej dyfuzji numerycznej", która stabilizuje rozwiązanie i nie rozmywa frontów falowych w stopniu większym niż, np. pseudolepkość. Zagadnieniu temu poświęcony będzie również osobny punkt niniejszego rozdziału. W tym miejscu można jedynie nadmienić, że formalnie problem ten sprowadza sie do odpowiedniej modyfikacji schematu (3.19) zastosowanego do równań zachowania pędu.

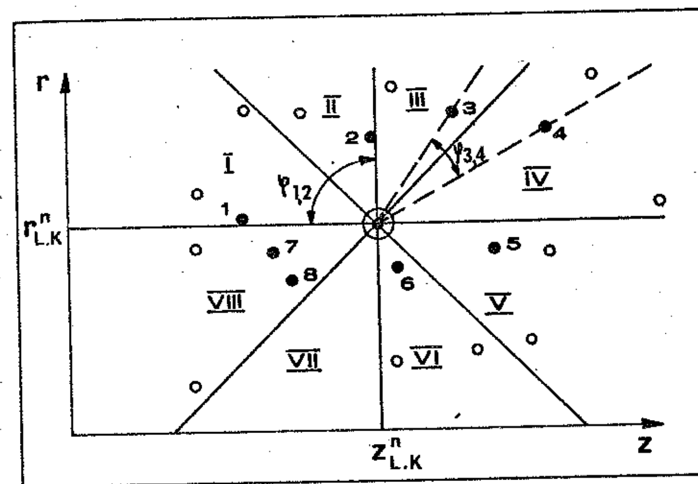
Jeżeli przedstawioną powyżej metodę zastosować kolejno do wszystkich punktów materialnych, pokrywających badane ciało i powtarzać ją w kolejnych chwilach czasu, to dostaniemy poszukiwane rozwiazanie problemu w dyskretnej, czasowo-przestrzennej formie.

3.2. Wybór punktów sąsiednich.

Z przeprowadzonych dotychczas rozważań wynika, że w trakcie obliczeń w każdym punkcie musimy dysponować informacją o aktualnie najbliższych względem niego punktach sąsiednich i ich parametrach. Odpowiednia obróbka tej informacji pozwala określić niezbędne gradienty pól prędkości i naprężeń.

W tej sytuacji należy w pierwszej kolejności udzielić odpowiedzi na następujące pytanie: z ilu i w jaki sposób wybieranych punktów należy tworzyć zbiór punktów sąsiednich dla danego punktu ?. Na pytanie to nie można niestety udzielić

ścisłej, jednoznacznej odpowiedzi [49]. Można jedynie odwołując się do określonych analogii z klasyczną siecią numeryczną, wskazać na dość dobre i sprawdzone w praktyce rozwiązanie tego problemu. Pochodne przestrzenne w poszczególnych węzłach klasycznej sieci numerycznej wylicza się w oparciu o informację zawartą w czterech węzłach sąsiednich. Kątowy rozkład tych węzłów, względem węzła, w którym aktualnie prowadzone są obliczenia charakteryzuje kąt $\varphi_{ij} = 90°$. Indeksy (i, j) oznaczają numery dwóch, kolejnych w kątowym rozkładzie węzłów, tak jak pokazano to przykładowo na rys.9. W omawianej metodzie rozkłady kątowe punktów sąsiednich będą nieregularne, ale możemy zarządać, aby ilość i sposób ich wyboru zapewniał spełnienie warunku $\varphi_{ij} \leq 90°$.



Rys.9. Ilustracja metody wyboru punktów sąsiednich

Z rys.9 widać, że warunek ten można spełnić jeśli z punktu $(r^n_{L,K}, z^n_{L,K})$ podzielić płaszczyznę (r,z) na osiem równych sektorów kątowych i w każdym sektorze wybrać punkt najbliższy względem punktu (L,K). Wówczas, nawet przy najmniej korzystnym rozkładzie kątowym (p. 1 i 2 na rys.9) będzie zachodzić $\varphi_{ij} \leq 90°$.

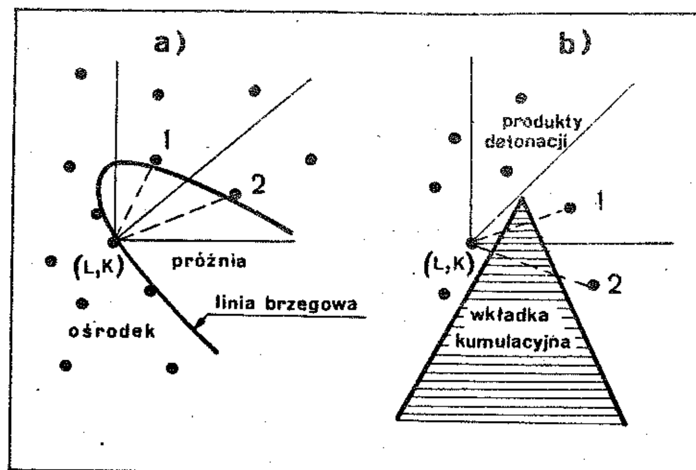
Wybór ośmiu punktów do tworzenia zbioru najbliższych sąsiadów dla danego punktu w oparciu o wyżej sformułowane kątowo-odległościowe kryterium można więc w pewnym sensie uznać za "optymalny". Mniejsza liczba punktów sąsiednich zwiększa bowiem niebezpieczeństwo pojawienia się tzw. niestabilności kątowych ($\varphi_{i,j}$ >90°). Natomiast zwiększenie liczby punktów sąsiednich powyżej 8 prowadzi jedynie do niepożądanego zwiększania obszaru wzajemnych oddziaływań między punktami.

Ze względu na dużą czasochłonność operacji ustalania najbliższego sąsiedztwa, nie można jej przeprowadzać na każdym kroku czasowym. W zależności od szybkości i charakteru deformacji ośrodka, odstęp czasowy między kolejnymi operacjami uaktualniania zbiorów najbliższych sąsiadów, powinien być dobierany tak, aby przeciętnie wymianie podlegał nie więcej niż jeden spośród ośmiu punktów. Jest to podyktowane dążeniem do zminimalizowania fluktuacji numerycznych, które zawsze wprowadza "operacja wymiany sąsiadów". Operacja ta zapewnia wspomnianą już w poprzednim rozdziale "wymienność" węzłów sieci numerycznej, umożliwiającą prowadzenie obliczeń w warunkach skrajnie dużych deformacji.

Czasochłonność obliczeń można znacznie zmniejszyć również na innej drodze, mianowicie każdemu punktowi można przyporządkować pewien podzbiór M punktów i tylko z niego wybierać najbliższe osiem punktów sąsiednich, a nie przeglądać zbioru wszystkich punktów. Podzbiór ten można łatwo utworzyć na bazie aktualnych punktów sąsiednich wziętych wraz z ich własnymi punktami sąsiednimi. Podzbiór M może więc w takim przypadku zawierać maksymalnie 72 punkty. Operacja jego tworzenia jest technicznie dość prosta, jeśli w każdym punkcie zakodowana jest informacja o numerach identyfikacyjnych jego punktów sąsiednich. Konieczność kodowania takiej informacji wynika również stąd, że zbiór punktów sąsiednich musi być w jakiś sposób zapamiętany między kolejnymi operacjami jego uaktualniania.

Dla punktów tworzących brzeg rozważanego obszaru (a niekiedy i dla niektórych punktów wewnętrznych) powstawać będzie problem braku punktów sąsiednich w niektórych sektorach kątowych. W takim przypadku najwygodniej podzielić proces tworzenia zbioru punktów sąsiednich na dwa etapy. W pierwszym etapie z każdego sektora, w którym znajdują się punkty z podzbioru M, wybieramy punkt najbliższy względem danego punktu. Brakujące punkty (do ośmiu) można w drugim etapie dobrać z pozostałych punktów podzbioru M rezygnując już z kryterium kątowego wyłącznie na rzecz kryterium najmniejszych odległości. Na rys.9 takim dodatkowo dobranym punktem jest punkt nr 7, gdyż sektor nr VII jest sektorem pustym.

Oczywiście, możliwość pojawienia sie sektorów pustych dla punktów wewnętrznych może prowadzić do naruszenia kryterium $\varphi_{i,j}$ <90° i trzeba temu w określony sposób przeciwdziałać aby uniknąć pojawienia się tzw. niestabilności kątowych. Problem ten zostanie szerzej omówiony w następnym punkcie, a na zakończenie tych rozważań należy zwrócić jeszcze uwagę na pewne praktyczne aspekty poprawności realizacji procesu wyboru punktów sąsiednich. W praktyce zdarzać się bowiem będą przypadki, że punkty spełniające formalne, kątowo-odległościowe warunki, nie będą mogły fizycznie tworzyć sąsiedztwa danego punktu. Może to wynikać na przykład z rozdzielenia tych punktów brzegami rozważanych obszarów. Dwa tego typu przykłady pokazano na rys.10.
Punkty takie, jak np. oznaczone numerami 1 i 2 na rys.10a) i 10b) muszą być eliminowane ze zbioru punktów sąsiednich względem punktu (L,K) aby zapobiec pojawianiu się niefizycznych efektów. Technicznie, operacje takie muszą wykonywać odpowiednie algorytmy śledzące usytuowanie punktów sąsiednich i linii brzegowych.



Rys. 10. Punkty (1,2) eliminowane ze zbioru punktów sąsiednich punktu (L,K).

3.3. Niestabilności zbliżeniowe i kątowe.

Jedną z charakterystycznych i zarazem dość nietypowych cech omawianej metody numerycznej jest to, że sieć przestrzenną tworzą w niej nieregularnie rozłożone punkty przemieszczające się wraz z deformowanym ośrodkiem. Stwarza to określone trudności przy próbach zdefiniowania tzw. kroku przestrzennego, odpowiedniego dla tej metody. Z kolei znajomość tego kroku jest bardzo ważna przy doborze kroku czasowego zapewniającego stabilność metody numerycznej.

W trakcie badań testowych okazało się , że z punktu widzenia warunków stabilności metody, rolę kroku przestrzennego odgrywa odległość między danym punktem, a najbliższym punktem sąsiednim. Oznacza to, że jeśli przy danym kroku czasowym, w pewnym miejscu rozważanego obszaru, dwa punkty zbliżą się na odległość mniejszą od pewnej wartości krytycznej (do której dostosowano ten krok czasowy), to nastąpi w tym miejscu lokalne

przekroczenie warunków stabilności. Objawia się to szybkim narastaniem niefizycznych wielkości wszystkich parametrów w otoczeniu tych punktów, a w dalszej kolejności prowadzi do rozpadu całego rozwiązania. Niestabilność tego typu można więc nazwać "niestabilnością zbliżeniową", gdyż pojawia się ona przy zbytnim (dla danego kroku czasowego) zbliżeniu do danego punktu, któregoś z jego punktów sąsiednich.

Oczywiście, można w takiej sytuacji próbować unikać tego typu niestabilności zmniejszając krok czasowy odpowiednio do zmniejszających się odległości między punktami. Rozwiązanie takie jest jednak bardzo nieefektywne. Pojedyńcze punkty mogą bowiem spowodować tak znaczne zmniejszenie kroku czasowego, że ze względów technicznych sens straci dalsze kontynuowanie obliczeń.

O wiele bardziej racjonalny jest inny sposób zabezpieczenia algorytmu przed niestabilnościami zbliżeniowymi. Można bowiem ustalić pewien minimalny promień R_{min}, taki, że zbliżenie dwóch punktów na odległość mniejszą od R_{min}, powoduje wykluczenie jednego z tych punktów z dalszych obliczeń. Równocześnie z tym wykluczeniem musi oczywiście następować ustalenie nowych zbiorów najbliższych punktów sąsiednich. Można również nie wykluczając żadnego punktu z obliczeń, wykluczyć jedynie oba punkty wzajemnie ze zbiorów swych najbliższych punktów sąsiednich. W ten sposób punkty te, których odległości są mniejsze od R_{min}, nie "widzą się" wzajemnie i nie "oddziaływują" bezpośrednio ze sobą. Oba sposoby eliminowania niestabilności zbliżeniowych są w równym stopniu skuteczne i oba moga być wykorzystywane w praktyce numerycznej.

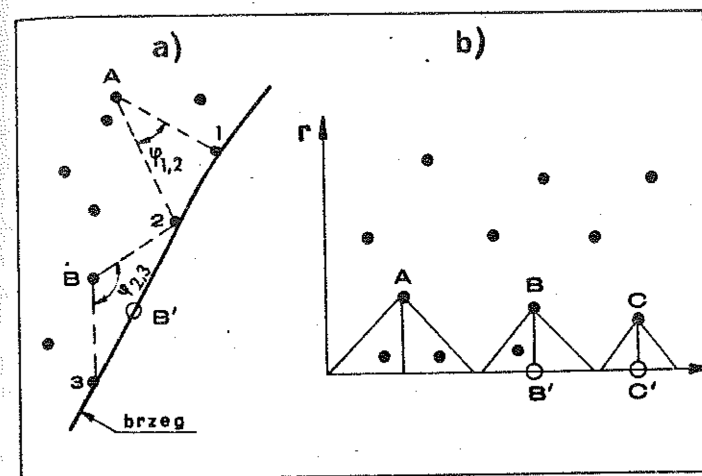
W trakcie omawiania sposobu wyboru punktów sąsiednich uwypuklono fakt, że przy nieregularnym kątowym rozkładzie punktów sąsiednich trzeba jednak dbać o to, aby rozkład ten spełniał warunek $\varphi_{i,j} < 90°$. Rozkład kątowy nie spełniający tego warunku będzie prowadził do określonego zafałszowania obliczonych na jego podstawie pochodnych przestrzennych. Jeśli bowiem w dużym sektorze kątowym ($\varphi_{i,j} > 90°$) nie ma punktów

sąsiednich, to nie mamy tam również informacji o wartościach odpowiednich pól. Tymczasem metoda numeryczna formalnie "wyinterpoluje" te informacje na podstawie danych zawartych w pozostałych sektorach. Procedura taka prowadzi jednak zawsze do stopniowej utraty - początkowo dokładności, a w późniejszych fazach stabilności lokalnej i globalnej (analogiczna sytuacja wystąpiłaby dla klasycznej sieci numerycznej, gdyby centralne pochodne przestrzenne, w sposób losowy zastępować lokalnie pochodnymi lewo lub prawostronnymi). Ponieważ niestabilności te związane są w omawianej metodzie z nieodpowiednim rozkładem kątowym punktów sąsiednich, nazwano je "niestabilnościami kątowymi".

Praktyka numeryczna pokazała, że kryterium $\varphi_{ij} < 90°$ może być w określonych warunkach nieznacznie naruszone. Stopień w jakim można je naruszyć, zależy jednak od położeń i stanów poszczególnych punktów, a w szczególności od poziomu "zewnętrznej dyfuzji numerycznej". Problemu tego nie można ściśle i jednoznacznie rozstrzygnąć i dlatego w praktyce bezpieczniej jest starać się świadomie nie naruszać warunku $\varphi_{ij} < 90°$.

Zaproponowany sposób wyboru punktów sąsiednich zasadniczo gwarantuje spełnienie tego warunku. Powstają jednak i takie sytuacje, w których jego spełnienie jest fizycznie niemożliwe, a utrzymanie stabilności obliczeń wymaga specjalnego przeciwdziałania. Ilustruje te sytuacje rys.11.

Na rys.11 a) numerami 1,2 i 3 oznaczono punkty tworzące brzeg rozważanego obszaru , a literami A i B przykładowe punkty wewnętrzne. Z punktów A i B najbliższe punkty brzegowe widać odpowiednio pod kątami $\varphi_{1,2}$ i $\varphi_{2,3}$. Dla punktu A zachodzi $\varphi_{1,2} < 90°$ i sytuacja taka nie wymaga żadnych interwencji. Natomiast dla punktu B mamy $\varphi_{2,3} > 90°$, a w sektorze tym nie ma już fizycznie żadnych innych punktów. Sytuacja taka prowadzi nieuchronnie do pojawienia się niestabilności kątowej. Jedynym sposobem jej uniknięcia jest usunięcie punktu B z dalszych obliczeń, z równoczesnym utworzeniem nowych zbiorów punktów



Rys.11. Przestrzenne konfiguracje punktów sąsiednich - sytuacje sprzyjające powstawaniu niestabilności kątowych.

sąsiednich. Aby zapobiec zbytniemu rozrzedzaniu sieci przestrzennej skutkiem takich zabiegów, można w miejsce wyeliminowanego punktu wewnętrznego B, wprowadzić między punkty 2 i 3 nowy punkt brzegowy B'. Parametry tego punktu mogą wynikać z liniowej interpolacji między parametrami punktów 2 i 3. Działanie takie prowadzi do lokalnego zagęszczenia sieci punktów brzegowych tam, gdzie odległości między nimi stały się zbyt duże. Zmniejsza się w ten sposób prawdopodobieństwo pojawienia się w tym obszarze dalszych niestabilności kątowych i jednocześnie nie zmniejsza się ogólnej liczby węzłów numerycznych.

Natomiast na rys.11 b) pokazano typowe sytuacje w jakich mogą znaleźć się punkty wewnętrzne A,B i C przy zbliżaniu się do osi symetrii. Jeżeli w sektorach kątowych skierowanych na oś symetrii znajdują się dwa punkty sąsiednie, tak jak to ma

miejsce w przypadku punktu A, to nie zachodzi oczywiście niebezpieczeństwo pojawienia się niestabilności kątowych. Jeśli jednak punkt wewnętrzny znajdzie się dostatecznie blisko osi, to w sektorach tych może znaleźć się jeden punkt sąsiedni (punkt B) lub może nie być ich w ogóle (punkt C). W takiej sytuacji należy w obszar sąsiedztwa punktów B i C włączyć dodatkowe, specjalnie w tym celu tworzone punkty B' i C', zwane dalej punktami fikcyjnymi. Parametry punktów fikcyjnych nie są obliczane, ale zadawane w taki sposób, aby zapewnić spełnienie odpowiednich warunków na osi symetrii ($u=0$, $\sigma_{rz}=0$). Tak więc punkty fikcyjne mogą z jednej strony zapobiec powstawaniu przyosiowych niestabilności kątowych, a z drugiej strony mogą umożliwić spełnienie odpowiednich warunków brzegowych. Problem ten łączy się więc z problemem numerycznej aproksymacji warunków brzegowych i omówiony zostanie dokładniej w następnym punkcie.

3.4. Aproksymacja numeryczna warunków początkowo-brzegowych.

W kodzie numerycznym wszystkie zmienne określające stan każdego z punktów materialnych są zapamiętywane i przechowywane w odpowiednich , wielowymiarowych tablicach. Warunki początkowe określają wartości wszystkich zmiennych zależnych w chwili początkowej, a więc wystarczy wartości te wprowadzić przed rozpoczęciem obliczeń w określone miejsca tych tablic. Problem ten nieco komplikuje się przy modelowaniu detonacji materiału wybuchowego. W tym przypadku należy bowiem zapamiętać dodatkowo czas dojścia frontu fali detonacyjnej do danego punktu oraz umieć rozróżniać punkty przed i za frontem tej fali. Problem numerycznej aproksymacji warunków początkowych jest więc dość prosty, zarówno od strony ideowej jak i od strony realizacji numerycznej i dlatego nie ma potrzeby poświęcać mu więcej . uwagi.

O wiele bardziej złożony jest natomiast problem znalezienia odpowiednich sposobów umożliwiających spełnienie

warunków brzegowych w rozwiązaniu numerycznym. Oryginalność metody stwarza w tym względzie dodatkowe trudności, gdyż nie daje praktycznie możliwości skorzystania z wiedzy literaturowej.

Przystępując do omówienia tego zagadnienia należy w pierwszej kolejności rozstrzygnąć problem podstawowy, dotyczący ogólnych możliwości uwzględniania warunków brzegowych w rozwiązaniach numerycznych. Istnieją bowiem dwa, różniące się dość zasadniczo, sposoby podejścia do tego problemu.

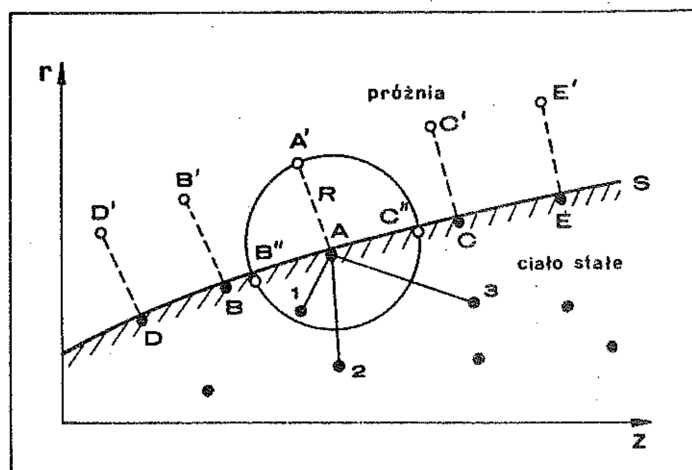
Pierwszy sposób polega na tworzeniu odrębnych klas punktów brzegowych, dla których buduje się specjalne algorytmy numeryczne uwzględniające fakt, że na brzegu znane są określone wartości zmiennych zależnych. Takie postawienie zagadnienia komplikuje jednak znacznie cały proces obliczeniowy. Oprócz tego narusza ono jednorodność schematu numerycznego, co często prowadzi do generacji niepożądanych numerycznych fluktuacji. Na początkowych etapach niniejszej pracy próbowano częściowo wprowadzić takie rozwiązanie, a mówiąc konkretnie usiłowano przy jego pomocy spełnić odpowiednie warunki na osi symetrii. Wiązało się to z wyodrębnieniem specjalnej klasy punktów osiowych, dla których formuły obliczeniowe uwzględniały warunki: $u=\sigma_{rz}=0$ dla $r=0$ oraz zawierały przejścia typu : $\frac{u}{r} \to \frac{\partial u}{\partial r}$. Właśnie różnice w numerycznych aproksymacjach członu $\frac{u}{r}$ (dla punktów przyosiowych) i $\frac{\partial u}{\partial r}$ (dla punktów osiowych) były przyczyną trudnych do usunięcia fluktuacji parametrów w otoczeniu osi. Dlatego też w późniejszych pracach zrezygnowano z wprowadzania punktów osiowych. Oprócz tego sposób ten, polegający na bezpośrednim wprowadzaniu wielkości wynikających z warunków brzegowych do obliczanych węzłów, prowadzi w pewnych przypadkach do trudnych do usunięcia numerycznych paradoksów, np. przy modelowaniu procesu wychodzenia fali uderzeniowej na swobodną powierzchnię.

Z wyżej wymienionych powodów zrezygnowano więc definitywnie z tego sposobu i zastąpiono go innym, prostszym, bardziej uniwersalnym i nie naruszającym

jednorodności schematu obliczeniowego sposobem. Polega on na wprowadzeniu tzw. punktów fikcyjnych, którymi należy otoczyć brzeg rozważanego obszaru. W punktach tych przechowuje się wynikające z warunków brzegowych informacje o wartościach odpowiednich zmiennych zależnych. Rozważmy więc szczegółowo, jak wykorzystać taką ideę do numerycznej aproksymacji warunków brzegowych, na:

1. powierzchniach swobodnych,
2. powierzchniach swobodnego poślizgu (gaz - ciało stałe),
3. osi symetrii.

Ad.1. Rozważmy sytuację przedstawioną na rys.12.



Rys.12. Modelowanie warunków brzegowych na powierzchniach swobodnych.

Brzeg badanego ciała tworzą leżące wzdłuż linii S punkty A,B,C,D itd. Punkty B,C oraz przykładowo 1,2 i 3 tworzą sąsiedztwo punktu A, a punkty B" i C" wynikają z interpolacji między parametrami punktów A i B oraz A i C. Punkty A',B',C',D', itd. są przyporządkowanymi odpowiednim punktom brzegowym punktami fikcyjnymi.

Jak wiadomo warunki brzegowe na powierzchni swobodnej sprowadzają się do zadania na niej związków: $\sigma_n = \sigma_\tau = 0$. Z tego co powiedziano powyżej wynika, że próby wprowadzania tych relacji bezpośrednio do formuł obliczeniowych dla punktów brzegowych są nieefektywne. Należy więc zastąpić te relacje inną informacją, która byłaby im numerycznie równoważna. Może nią być na przykład informacja o stanie ośrodka graniczącego z rozważanym obszarem. W przypadku powierzchni swobodnej możemy powiedzieć, że warunek $\sigma_n = \sigma_\tau = 0$ będzie spełniony na powierzchni ciała, jeśli w ośrodku z nim graniczącym będą zerowały się wszystkie składowe tensora naprężeń: $\sigma_{ik} = 0$. Innymi słowy, warunek $\sigma_n = \sigma_\tau = 0$ w punkcie A możemy zastąpić warunkiem $\sigma_{ik} = 0$ w punkcie A'. W takiej sytuacji obliczenia w punkcie A można prowadzić w oparciu o te same schematy numeryczne, które wykorzystuje się dla punktów wewnętrznych. Zmianie ulegnie jedynie sposób obliczania pochodnych przestrzennych, który musi teraz uwzględniać informację zawartą w punkcie fikcyjnym A'.

Praktyczny tok postępowania będzie więc następujący:

a/ W punkcie A wystawiamy normalną do powierzchni S wykorzystując w tym celu położenia punktów B i C.

b/ W odległości równej promieniowi interpolacji R tworzymy na normalnej punkt A' i zadajemy w nim: $\sigma_{ik} = 0$.

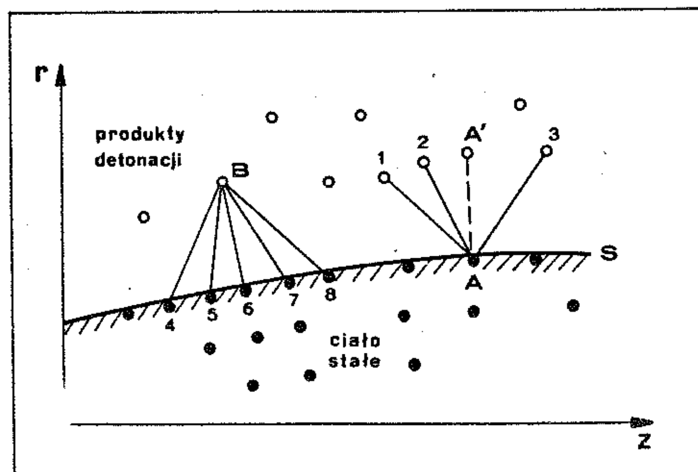
c/ Wszystkie pochodne przestrzenne w punkcie A wyliczamy tak jakby to był zwykły punkt wewnętrzny, w oparciu o jego punkty sąsiednie: B,C,1,2,3,itd.

d/ W punktach interpolowanych B" i C" przyjmujemy nowe wartości naprężeń, takie, jakie daje w tych punktach płaszczyzna interpolacyjna (3.7).

e/ Mając określone położenia punktów: A,B",C" i A' oraz znając w nich składowe tensora naprężeń, możemy w punkcie A wyliczyć nowe pochodne przestrzenne pól naprężeń. Można w tym celu wykorzystać wzory od (3.7) do (3.18) przyjmując N=3. Pochodne przestrzenne pola prędkości pozostawiamy bez zmiany.

Charakterystyczną cechą takiego podejścia jest to, że w punkcie A pochodne wzdłuż kierunku normalnego do S są dla naprężeń określane na podstawie wartości zadanych na zewnątrz obszaru (punkt A'), a dla prędkości na podstawie wartości z wnętrza obszaru (punkty 1,2,3,...). Jest rzeczą ciekawą, że inne sposoby aproksymacji pól naprężeń prowadzą do wyników obarczonych silnymi fluktuacjami numerycznymi lub nawet o niefizycznym charakterze. Bliższe przyjrzenie się idei "komórek fikcyjnych" w metodach sieciowych [55,67] wskazuje, że korzysta się tam z analogicznego sposobu obliczania pochodnych przestrzennych. Jest on tylko bardziej zamaskowany przez to, że ciśnienia określa się tam w środkach, a prędkości na brzegach komórek.

Ad.2. Aproksymacja numeryczna warunków na powierzchni kontaktu: gazowe produkty detonacji - metalowa wkładka kumulacyjna okazała się problemem bardziej skomplikowanym. Prześledźmy sposób jego rozwiązania na przykładzie sytuacji pokazanej na rys.13.



Rys.13. Modelowanie warunków brzegowych na granicy kontaktu: gaz - ciało stałe.

Powierzchnia S oddziela ciało stałe od gazowych produktów detonacji. Punkty A,4,5,6,7,8 reprezentują ciało stałe; B,1,2,3 - produkty detonacji; punkt A' jest punktem fikcyjnym odpowiadającym punktowi A.

Procedurę zabezpieczającą spełnienie warunków brzegowych dzieli się na każdym kroku czasowym na dwa etapy. Na każdym z nich spełnia się część warunków brzegowych, oddzielnie i niezależnie dla każdego z ośrodków.

Weźmy najpierw pod uwagę punkt A reprezentujący brzeg ciała stałego. W punkcie tym stosujemy procedurę analogiczną do omówionej w poprzednim przypadku. Różnica polega tylko na tym, żę w punkcie fikcyjnym A' nie kładziemy $\sigma_{ik}=0$, ale $S_{ik}=0$ i $p=\bar{p}\neq 0$. W punkcie fikcyjnym zakodowana jest więc informacja, że ciało stałe graniczy z gazem o ciśnieniu $\bar{p}$. Ciśnienie to na każdym kroku czasowym ustala się, odpowiednio uśredniając ciśnienia z kilku (np. oznaczonych numerami 1,2 i 3) najbliższych względem A' punktów reprezentujących produkty detonacji.

Brzegowy punkt reprezentujący produkty detonacji oznaczono na rys.13 literą B. Można przyjąć modelowo, że gaz (reprezentowany przez punkt B) "widzi" brzeg ciała stałego (reprezentowany przez punkty 4,5,6,7,8) jak nieprzenikliwą, poruszającą się ściankę. Rozważmy zatem, w jaki sposób można uwzględnić wpływ tej ścianki na ruch punktu B. Pole prędkości wokół punktu B możemy zamodelować następująco:

$$u = u_0 + u_{,r}^{\circ}(r - r_0) + u_{,z}^{\circ}(z - z_0) \qquad (3.22)$$

$$v = v_0 + v_{,r}^{\circ}(r - r_0) + v_{,z}^{\circ}(z - z_0) \qquad (3.23)$$

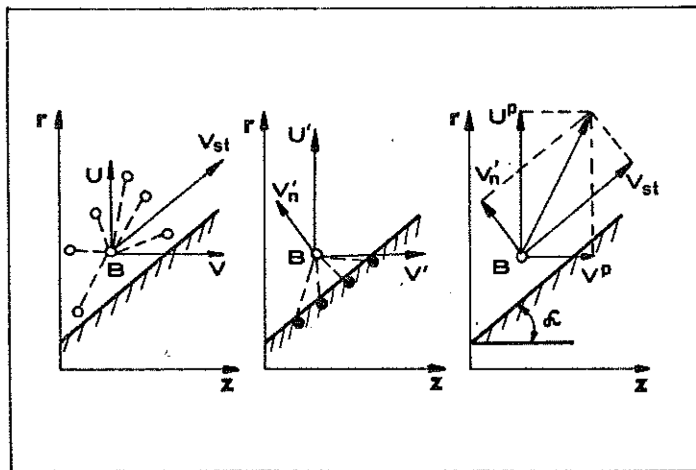
gdzie: r_0, z_0 - współrzędne punktu B; u_0, v_0 - składowe wektora prędkości masowej w punkcie B; $u_{,r}^{\circ}$, $u_{,z}^{\circ}$, $v_{,r}^{\circ}$, $v_{,z}^{\circ}$ pochodne przestrzenne pola prędkości znajdowane w oparciu o wzory (3.7) ÷ (3.18). Pole opisane wzorami (3.22) ÷ (3.23) jest polem wokół punktu B pochodzącym od jego punktów sąsiednich w

produktach detonacji. Jednocześnie w punkcie B można określić również inne pole prędkości (u', v') pochodzące od najbliższych mu punktów brzegowych ciała stałego (na rys. 13 oznaczonych numerami 4,5,6,7,8):

$$u' = u_o + u_{1r}^{10}(r - r_o) + u_{1z}^{10}(z - z_o) \qquad (3.24)$$

$$v' = v_o + v_{1r}^{10}(r - r_o) + v_{1z}^{10}(z - z_o) \qquad (3.25)$$

Wielkości: u_{1r}^{10}, u_{1z}^{10}, v_{1r}^{10}, v_{1z}^{10} można również określić z wzorów (3.7) ÷ (3.18) przyjmując, że B jest punktem centralnym, a jego punktami sąsiednimi są punkty: 4,5,6,7,8. Korzystając z tych dwóch rozkładów prędkości (u, v) i (u', v') należy zbudować trzeci rozkład (u^p, v^p), który uwzględniałby modelowo nieprzenikliwość ścianki oraz możliwość swobodnego ślizgania się gazu wzdłuż niej. Symbolicznie pokazano te rozkłady na rys. 14.



Rys. 14. Rozkłady prędkości (u, v), (u', v') oraz (u^p, v^p) w produktach detonacji na granicy kontaktu z ciałem stałym.

Z "własnego" rozkładu prędkości (u, v) tworzymy zatem składową styczną v_{st} nowego pola (u^p, v^p) a z "zewnętrznego" rozkładu (u', v') składową normalną v'_n nowego pola. Przyjmując, że w punkcie B brzeg tworzy z osią "z" lokalny kąt α, mamy:

$$v_{st} = u \sin\alpha + v \cos\alpha \qquad (3.26)$$

$$v'_n = u' \cos\alpha - v' \sin\alpha \qquad (3.27)$$

Ze składowych v_{st} i v'_n tworzymy nowy, poszukiwany rozkład prędkości w punkcie B (rys. 14):

$$u^p = v_{st} \sin\alpha + v'_n \cos\alpha \qquad (3.28)$$

$$v^p = v_{st} \cos\alpha - v'_n \sin\alpha \qquad (3.29)$$

Pole (u^p, v^p) można przedstawić w postaci:

$$u^p = u_o + u_{1r}^p(r - r_o) + u_{1z}^p(z - z_o) \qquad (3.30)$$

$$v^p = v_o + v_{1r}^p(r - r_o) + v_{1z}^p(z - z_o) \qquad (3.31)$$

Po odpowiednich przekształceniach dostajemy wyrażenia na pochodne przestrzenne skorygowanego pola prędkości:

$$u_{1r}^p = u_{1r}^o + \cos^2\alpha\,(u_{1r}^{10} - u_{1r}^o) + \sin\alpha\cos\alpha\,(v_{1r}^o - v_{1r}^{10}) \qquad (3.32)$$

$$u_{1z}^p = u_{1z}^o + \cos^2\alpha\,(u_{1z}^{10} - u_{1z}^o) + \sin\alpha\cos\alpha\,(v_{1z}^o - v_{1z}^{10}) \qquad (3.33)$$

$$v_{1r}^p = v_{1r}^o + \sin^2\alpha\,(v_{1r}^{10} - v_{1r}^o) + \sin\alpha\cos\alpha\,(u_{1r}^o - u_{1r}^{10}) \qquad (3.34)$$

$$v_{1z}^p = v_{1z}^o + \sin^2\alpha\,(v_{1z}^{10} - v_{1z}^o) + \sin\alpha\cos\alpha\,(u_{1z}^o - u_{1z}^{10}) \qquad (3.35)$$

Reasumując, w punkcie B pochodne przestrzenne pola prędkości oblicza się ze wzorów (3.32) ÷ (3.35), a pochodne pól naprężeń pozostawia się bez zmian. W pewnym sensie postępujemy więc odwrotnie niż przy obliczeniach w punkcie A, gdzie koryguje się pola naprężeń, a pozostawia bez zmian pola prędkości.

Tak zaproponowana procedura daje bardzo dobrą aproksymację warunków brzegowych na powierzchniach kontaktu: gaz - ciało stałe. Stwierdzono, że procedura ta może okazać się zawodną tylko wtedy, gdy brzeg ciała stałego nie będzie dostatecznie gładki w stosunku do lokalnych gęstości sieci punktów brzegowych. Jest to zrozumiałe, gdyż tracą wówczas sens operacje uśredniania pól na wielu punktach, ustalania kierunków normalnych i stycznych do brzegu, itp.

Ad.3. Omawiając niestabilności kątowe zasygnalizowano problem konieczności wstawiania punktów fikcyjnych na osi symetrii. Wspomniano tam również, że punkty te mogą spełniać podwójną rolę, tzn. zapobiegać powstawaniu niestabilności kątowych i jednocześnie zabezpieczać spełnienie odpowiednich warunków na osi symetrii. Rozważmy zatem jakie wartości zmiennych zależnych należy przyjmować w osiowych punktach fikcyjnych, takich jak, np. punkt B' lub C' na rys.11. Na osi symetrii spełnione są dwa warunki: $u=0$ i $S_{rz}=0$ i oczywiście te dwie wartości trzeba przyjąć w punkcie fikcyjnym. Z kolei z warunków tych i równań problemu wynika, że na osi symetrii powinno zachodzić:

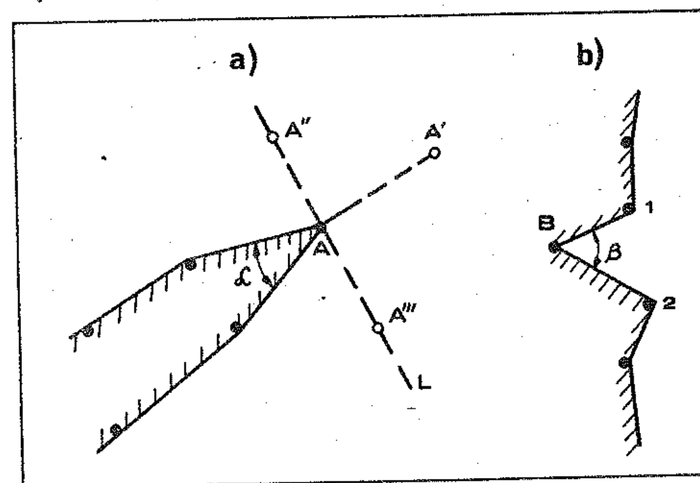
$$\frac{\partial v}{\partial r}=0\,; \qquad \frac{\partial p}{\partial r}=0\,; \qquad \frac{\partial S_{rr}}{\partial r}=0\,; \qquad \frac{\partial S_{zz}}{\partial r}=0 \tag{3.36}$$

Zerowanie się tych pochodnych można zasymulować w ten sposób, że w punkcie fikcyjnym B' przyjmujemy takie same wartości funkcji v, p, S_{rr} i S_{zz} jak w punkcie B. Reasumując: w punkcie fikcyjnym B', którego położenie w każdej chwili czasu wynika ze zrzutowania na oś punktu B, należy przyjąć następujące wartości zmiennych zależnych:

$$u=0;\quad S_{rz}=0\;;\quad v=v_B\;;\quad p=p_B\;;\quad S_{rr}=S_{rr}\big|_B;\quad S_{zz}=S_{zz}\big|_B \tag{3.37}$$

gdzie indeks "B" oznacza wartości wzięte w punkcie B. Ponieważ punkt C (rys.11) nie ma w ogóle przyosiowych punktów sąsiednich to odpowiedni punkt fikcyjny C' można w metodzie najmniejszych kwadratów brać z podwójną wagą.

W praktyce numerycznej często zdarzają się sytuacje, które wymagają dodatkowych zabiegów zabezpieczających rozwiązanie przed pojawieniem się niefizycznych efektów lub patologicznymi deformacjami linii brzegowych. Na rys.15 mamy pokazane dwie takie sytuacje wymagające dodatkowych ingerencji.



Rys.15. Konfiguracje punktów brzegowych wymagające dodatkowych działań zabezpieczających stabilność obliczeń.

Rys.15 a) przedstawia sytuację, w której punkt A tworzy wierzchołek wąskiego ostrza. Można łatwo przewidzieć, że bez dodatkowych zabezpieczeń, przy odpowiednio małym α pojawią się niefizyczne fluktuacje parametrów związane z niestabilnością płaszczyzny interpolującej pola prędkości i naprężeń w kierunku " L ". Dlatego też wzdłuż tego kierunku należy dla dostatecznie małych α dobudować dodatkowe punkty

fikcyjne, które na rys. 15 a) oznaczono symbolami A" i A"'. Praktycznie, takie zabezpieczenie można wprowadzić już przy $\alpha < 90°$.

Natomiast na rys. 15 b) pokazano charakterystyczne "wklęśnięcie" linii brzegowej. Takie wklęśnięcia mogą pojawiać się w obszarach, w których zachodzi silne zagęszczanie punktów brzegowych. Zagęszczaniu takiemu mogą towarzyszyć niestabilności wyboczeniowe, ale z reguły ich skala jest mała w porównaniu z odległościami punktów brzegowych i niestabilności fizyczne łatwo przeradzaja się w niestabilności numeryczne, których efektem stają się takie, "jednopunktowe wklęśnięcia". Jedynym skutecznym sposobem przeciwdziałania w takim przypadku jest regularyzacja linii brzegowej, a więc usunięcie punktu B z obliczeń i utworzenie nowego brzegu miedzy punktami 1 i 2. Działania takie, mające lokalny charakter i oczywiście niezbyt często podejmowane nie mogą wpłynąć w sposób widoczny na globalny wynik symulacji komputerowej. Natomiast ich zaniechanie prowadzi najczęściej do tzw. patologicznych deformacji linii brzegowych, czyli mówiąc obrazowo do "wymieszania się" sąsiednich punktów brzegowych. Oczywiście traci wówczas sens procedura stawiania warunków brzegowych i cały algorytm ulega rozpadowi.

3.5. Metoda obliczeń efektów lepko-plastycznych.

Ogólna postać związków konstytutywnych , z wyodrębnieniem członu opisującego lepko-plastyczne płynięcie materiału może być zgodnie z równaniami (2.15) ÷ (2.20) przedstawiona następująco:

$$\frac{dS_{ik}}{dt} = F_{ik} - \frac{\mu}{\eta}\phi S_{ik} \qquad (3.38)$$

$$\phi = 1 - \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\,Y}{\sqrt{S_{ij}S_{ij}}} \qquad (3.39)$$

$$\phi = 0 \quad \text{dla} \quad S_{ij}S_{ij} \leqslant \frac{2}{3}Y^2 \qquad (3.40)$$

Jeśli w jakimś obszarze badanego ciała mamy do czynienia z odkształceniami o charakterze sprężystym to zachodzi tam $\phi = 0$. Jeśli natomiast zachodzi $\phi > 0$ to oznacza, że występują tam efekty lepko-plastycznego płynięcia materiału. Zakresy odkształceń sprężystych od lepko-plastycznych oddziela warunek plastycznego płynięcia Misesa:

$$S_{ij}S_{ij} = \frac{2}{3}Y^2 \qquad (3.41)$$

W ciele lepko-plastycznym warunek ten może być dynamicznie przekraczany ($\phi > 0$), a relaksacja naprężeń do stanu opisanego warunkiem (3.41) odbywa się w czasie, którego charakterystyczną miarą jest, tzw. czas relaksacji τ . Przyjmując $\phi \approx 1$, można go w przybliżeniu ocenić:

$$\tau \approx \frac{\eta}{\mu} \qquad (3.42)$$

Zależność współczynników η i μ od ciśnienia, gęstości a zwłaszcza temperatury powoduje, że w interesujących nas zagadnieniach kumulacji możemy mieć do czynienia z bardzo szerokim zakresem zmian czasu relaksacji: $\tau \sim 10^{-6} \div 10^{-12}$ s. Tymczasem typowe wielkości kroków czasowych Δt (np. dla zamieszczonych w pracy przykładów) są rzędu 10^{-8} s. Oznacza to, że krok czasowy może być w pewnych obszarach znacznie większy od czasu relaksacji. Natomiast jawny schemat numeryczny typu (3.2) ma sens tylko wtedy gdy spełniony jest warunek $\Delta t \ll \tau$, czyli gdy procesy relaksacji są dostatecznie powolne w stosunku do kroku czasowego. Ze względu na czas i efektywność obliczeń nie można dążyć do spełnienia tego warunku metodą skracania kroku czasowego. Pozostaje więc tylko poszukiwanie innych niż formalny schemat (3.2), sposobów rozwiązania problemu. Poniżej przedstawiony zostanie jeden z takich sposobów, który uwzględnia fizyczny sens zachodzących zjawisk i nie wprowadza numerycznych zaburzeń przy niezmniejszonym kroku Δt.

W pierwszym etapie obliczamy zmiany naprężeń bez uwzględniania efektów lepko-plastycznych:

$$[S'_{ij}]^{n+1}_{L,K} = [S_{ij}]^{n}_{L,K} + [F_{ij}]^{n}_{L,K}\,\Delta t \qquad (3.43)$$

Dla uproszczenia dalszych wzorów przyjmijmy oznaczenie:

$$S'^{\,n+1}_{ij} \equiv [S'_{ij}]^{n+1}_{L,K}$$

Nowym składowym dewiatora tensora naprężeń $S'^{\,n+1}_{ij}$ odpowiada funkcja $\phi'^{\,n+1}$:

$$\phi'^{\,n+1} = 1 - \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot Y}{\sqrt{S'^{\,n+1}_{ij}\cdot S'^{\,n+1}_{ij}}} \qquad (3.44)$$

W zależności od wartości funkcji $\phi'^{\,n+1}$ możemy mieć do czynienia z dwoma podstawowymi przypadkami.

1. Jeśli zachodzi $\phi'^{\,n+1}<0$ to oznacza, że:
   a/ pozostajemy w obszarze odkształceń sprężystych jeśli zachodziło $\phi^{n}<0$;
   b/ z obszaru odkształceń lepko-plastycznych wchodzimy w obszar odkształceń sprężystych nawet bez uwzględniania efektu relaksacji naprężeń jeśli zachodziło $\phi^{n}>0$.

Zarówno w wariancie a/ jak i b/ podstawowy algorytm nie wymaga korekty i można przyjąć ostatecznie:

$$S^{n+1}_{ik} = S'^{\,n+1}_{ik}$$

2. Jeśli zachodzi $\phi'^{\,n+1}>0$ to znaczy, że wchodzimy ($\phi^{n}<0$) lub pozostajemy ($\phi^{n}>0$) w obszarze odkształceń lepko-plastycznych. Efekt relaksacji naprężeń można w tym przypadku ocenić następująco:

$$S''^{\,n+1}_{ik} = S'^{\,n+1}_{ik}\cdot \exp\left(-\frac{\mu}{\eta}\,\phi'^{\,n+1}\,\Delta t\right) \qquad (3.45)$$

Odpowiadająca skorygowanym naprężeniom $S''^{\,n+1}_{ik}$ funkcja $\phi''^{\,n+1}$ będzie oczywiście wyrażona wzorem:

$$\phi''^{\,n+1} = 1 - \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\,Y}{\sqrt{S''^{\,n+1}_{ij}\cdot S''^{\,n+1}_{ij}}} \qquad (3.46)$$

Jeśli $\phi''^{\,n+1}>0$ to oznacza, że mimo relaksacji naprężeń pozostajemy nadal w obszarze odkształceń lepko-plastycznych i możemy przyjąć: $S^{n+1}_{ik} = S''^{\,n+1}_{ik}$.
Jeśli natomiast zachodzi $\phi''^{\,n+1}<0$, to oznacza to, że na kroku czasowym relaksacja naprężeń prowadzi do zejścia poniżej granicy plastycznego płynięcia Y. Oczywiście zejście to ma charakter formalny, wynikający ze wzoru (3.45), który nie uwzględnia faktu zerowania się funkcji ϕ w momencie osiągania granicy plastycznego płynięcia. Mamy więc w tym przypadku do czynienia z sytuacją, w której "naprężenia sprężyste" przekraczają granicę plastycznego płynięcia ($\phi'^{\,n+1}>0$), a efekt relaksacji sprowadza je formalnie poniżej tej granicy ($\phi''^{\,n+1}<0$) w ramach jednego kroku czasowego. Oznacza to, iż czas relaksacji jest w tym przypadku na tyle krótki, że zachowanie się ośrodka zupełnie dobrze będzie opisywał model ciała sprężysto-plastycznego Prandtla-Reussa. W modelu tym zakłada się, że naprężenia mogą osiągać granicę plastycznego płynięcia Y, ale nie mogą jej przekraczać. Należy je więc skorygować tak, aby spełniony był warunek Misesa. Osiąga się to stosując tzw. procedurę sprowadzania do kręgu płynięcia, czyli mnożenia wszystkich składowych dewiatora tensora naprężeń przez czynnik $(1-\phi'^{\,n+1})$:

$$S'''^{\,n+1}_{ik} = S'^{\,n+1}_{ik}\,(1-\phi'^{\,n+1}) \qquad (3.47)$$

i podstawiając ostatecznie: $S^{n+1}_{ik} = S'''^{\,n+1}_{ik}$. Przedstawiona powyżej procedura umożliwia w każdym punkcie, w każdej kolejnej chwili czasu określenie stanu naprężeń bez względu na relacje między czasem relaksacji τ, a krokiem czasowym Δt.

Odpowiednio do tej procedury należy również zmodyfikować sposób obliczania intensywności deformacji plastycznej. Nie można bowiem bezpośrednio korzystać z równania (2.31),

jeśli naprężenia określa się z modelu Prandtla-Reussa. Aby uniknąć tego typu problemów należy równanie (3.38) z wykorzystaniem równania (2.31) sprowadzić do postaci:

$$\frac{d\varepsilon^{p}_{ik}}{dt} = \frac{1}{2\mu}\left(F_{ik} - \frac{dS_{ik}}{dt}\right) \tag{3.48}$$

i dalej wykorzystując (3.43):

$$\left(\varepsilon^{p}_{ik}\right)^{n+1} = \left(\varepsilon^{p}_{ik}\right)^{n} + \frac{1}{2\mu}\left(S'^{\,n+1}_{ik} - S^{n+1}_{ik}\right) \tag{3.49}$$

Znajomość poszczególnych składowych tensora deformacji plastycznej $(\varepsilon^{p}_{ik})^{n+1}$ pozwala bezpośrednio ze wzoru (2.30) obliczyć wartość intensywności deformacji plastycznej $(\varepsilon^{p})^{n+1}$.

3.6. Modelowanie wzrostu objętości szczelin.

Weźmy pod uwagę sformułowane w poprzednim rozdziale równania opisujące dynamikę powstawania i wzrostu objętości szczelin. W równaniach tych występuje progowa wartość średniego naprężenia $\sigma_p = \sigma_o \frac{V_{c1}}{V_c + V_{c1}}$, po przekroczeniu której mogą zachodzić zmiany objętości szczelin. Okazało się przy tym, że wartość σ_p w pośredni sposób rzutuje na wartość kroku czasowego, przy którym wyniki obliczeń nie tracą fizycznego sensu. Jeśli przez Δp oznaczymy zmianę ciśnienia na kroku czasowym Δt w jakimś punkcie badanego ciała, to warunkiem otrzymania poprawnyvh wyników w jawnym schemacie numerycznym jest:

$$\Delta p \ll \sigma_p \tag{3.50}$$

Przekształćmy ten warunek tak, aby móc ocenić krok czasowy Δt niezbędny do jego spełnienia. Z równania stanu (2.21) mamy:

$$\Delta p \sim \frac{K_1}{\varrho_o}\Delta\varrho_s \tag{3.51}$$

a ze związku (2.36) między gęstością średnią, a gęstością fazy ciałostałowej:

$$\Delta\varrho_s \sim \varrho_o^2 \Delta V_c \tag{3.52}$$

Równanie opisujące dynamikę wzrostu objętości szczelin (2.34) pozwala z kolei na uzyskanie następującej oceny (w ramach rzędów wielkości):

$$\Delta V_c \sim k\,\sigma_p V_c \Delta t \tag{3.53}$$

Podstawiając (3.53) i (3.52) do (3.51) dostajemy:

$$\Delta p \sim k_1 \varrho_o k \sigma_p V_c \Delta t \tag{3.54}$$

Warunek (3.50) daje więc następujące oszacowanie Δt:

$$\Delta t \ll \frac{1}{k_1 \varrho_o k V_c} = \tau_c \tag{3.55}$$

Uwzględniając konkretne wartości współczynników k_1, ϱ_o, k oraz zakres typowych zmian $V_c \sim 10^{-5} \div 10^{-1} \frac{cm^3}{g}$ dostajemy: $\tau_c \approx 10^{-6} \div 10^{-10} s$.

Jak widać spełnienie warunku $\Delta t \ll \tau_c$ nie jest możliwe przy typowych krokach czasowych $\Delta t \approx 10^{-8} s$ (dla realnych wymiarów wkładek kumulacyjnych pokrytych siecią $\sim 10^2 \div 10^3$ punktów). Podobnie jak dla efektów lepko-plastycznego płynięcia trzeba i w tym przypadku znaleźć takie rozwiązanie problemu, które dobrze modelując fizykę zachodzących zjawisk nie pociąga za sobą konieczności zmniejszania kroku czasowego.

Bazując na tym, że w obszarach tworzenia się szczelin gęstość fazy ciałostałowej ϱ_s jest bliska ϱ_o, a równanie stanu w tych obszarach ma już przybliżony charakter, można przyjąć je w nieco uproszczonej postaci:

$$p = K_1\left(1 - \frac{\varrho_o}{\varrho_s}\right) + \gamma_o \varrho_o \varepsilon \tag{3.56}$$

Wykorzystując związek (2.36):

$$\frac{1}{\varrho} = V_c + \frac{1}{\varrho_s} \tag{3.57}$$

mamy:

$$p = k_1\left(1 - \frac{\varrho_0}{\varrho}\right) + \gamma_0 \varrho_0 \varepsilon + k_1 \varrho_0 V_c \tag{3.58}$$

W schemacie obliczeniowym przed wyliczeniem ciśnienia p, mamy już z równania ciągłości i równania zachowania energii wyliczone dla chwili t^{n+1} wartości: ϱ^{n+1} i ε^{n+1}. W takim razie wzór (3.58) wiąże na nowym kroku czasowym tylko nieznane wielkości ciśnień i objętości szczelin:

$$p^{n+1}_{L,K} = a_1 + a_2 \left(V_c\right)^{n+1}_{L,K} \tag{3.59}$$

gdzie: a_1, a_2 - znane na kroku t^{n+1} stałe. W dalszych przekształceniach wskaźniki: $n+1$ oraz (L, K) będą opuszczane, a więc należy pamiętać, że odpowiednie wzory będą dotyczyły wybranego punktu dla chwili t^{n+1}. Wykorzystując wyrażenie (3.59) możemy wyliczyć progowe na kroku t^{n+1} wartości objętości szczelin:

$$a_1 + a_2 V_c^+ = \sigma_0 \frac{V_{c1}}{V_c^+ + V_{c1}} \quad \text{dla} \quad p > 0 \tag{3.60}$$

$$a_1 + a_2 V_c^- = -\sigma_0 \frac{V_{c1}}{V_c^- + V_{c1}} \quad \text{dla} \quad p < 0 \tag{3.61}$$

skąd:

$$V_c^+ = \frac{-(a_1 + a_2 V_{c1}) + \sqrt{(a_1 + a_2 V_{c1})^2 + 4 a_2 V_{c1}(\sigma_0 - a_1)}}{2 a_2} \tag{3.62}$$

$$V_c^- = \frac{-(a_1 + a_2 V_{c1}) + \sqrt{(a_1 + a_2 V_{c1})^2 - 4 a_2 V_{c1}(\sigma_0 + a_1)}}{2 a_2} \tag{3.63}$$

przy czym:

$$V_c^+ = 0 \quad \text{dla} \quad a_1 > \sigma_0 \tag{3.64}$$

$$V_c^- = 0 \quad \text{dla} \quad a_1 > -\sigma_0 \tag{3.65}$$

Mając obliczone wartości V_c^+ i V_c^- można już prosto określić progowe wartości ciśnień na wzrost p^- lub zmniejszenie p^+ objętości szczelin:

$$p^+ = \sigma_0 \frac{V_{c1}}{V_c^+ + V_{c1}} \tag{3.66}$$

$$p^- = -\sigma_0 \frac{V_{c1}}{V_c^- + V_{c1}} \tag{3.67}$$

Z kolei znajomość wartości progowych p^+ i p^- na zmiany objętości szczelin pozwala już zapostulować następujący algorytm obliczeniowy:

1. Zakładając, że na kroku czasowym Δt objętość szczelin nie uległa zmianie ($V_c^{n+1} = V_c^n$) obliczamy gęstość fazy ciałostałowej ϱ'^{n+1}_s:

$$\varrho'^{n+1}_s = \frac{\varrho^{n+1}}{1 - \varrho^{n+1} V_c^n} \tag{3.68}$$

oraz odpowiadające jej ciśnienie z równania stanu:

$$p'^{n+1} = f\left(\varrho'^{n+1}_s, \varepsilon^{n+1}\right) \tag{3.69}$$

Jeśli spełniony jest warunek:

$$p^- < p'^{n+1} < p^+ \tag{3.70}$$

tzn. że znajdujemy się w stanie, w którym ciśnienie jest niższe od wartości progowych na zmiany objętości szczelin. Możemy więc na nowym kroku czasowym przyjąć:

$$p^{n+1} = p^{\prime n+1}; \qquad V_c^{n+1} = V_c^n \tag{3.71}$$

2. Jeśli warunek (3.70) nie jest spełniony, to musimy obliczyć zmianę objętości szczelin na kroku $\Delta t (|p| > \sigma_p)$.

Wprowadźmy oznaczenie:

$$\psi = \begin{cases} 1 - \dfrac{p^+}{p^{\prime n+1}} & \text{dla} \quad p^{\prime n+1} > p^+ \\ 1 - \dfrac{p^-}{p^{\prime n+1}} & \text{dla} \quad p^{\prime n+1} < p^- \end{cases} \tag{3.72}$$

Przyjmując $p^{\prime n+1}$ za miarę średniego ciśnienia, a wartości p^+ lub p^- za oszacowania ciśnienia progowego σ_p w ramach kroku czasowego Δt, możemy równanie (2.34) przedstawić w postaci różnicowej:

$$\frac{\Delta V_c}{\Delta t} = - K \psi p^{\prime n+1} (V_c + V_{co}) \tag{3.73}$$

a stąd:

$$V_c^{\prime n+1} = (V_c^n + V_{co}) \exp(- K \psi p^{\prime n+1} \Delta t) - V_{co} \tag{3.74}$$

Nowe wartości gęstości fazy ciałostałowej $\varrho_s^{\prime\prime n+1}$ i ciśnienia $p^{\prime\prime n+1}$ obliczamy analogicznie jak w punkcie 1:

$$\varrho_s^{\prime\prime n+1} = \frac{\varrho^{n+1}}{1 - \varrho^{n+1} V_c^{\prime n+1}} \tag{3.75}$$

$$p^{\prime\prime n+1} = f(\varrho_s^{\prime\prime n+1}, \varepsilon^{n+1}) \tag{3.76}$$

Wartości te możemy przyjąć jako obliczone na nowym kroku czasowym:

$$p^{n+1} = p^{\prime\prime n+1}; \qquad V_c^{n+1} = V_c^{\prime n+1} \tag{3.77}$$

z wyjątkiem dwóch przypadków:

a/ jeśli zaszło $p^{\prime n+1} > p^+$ i $p^{\prime\prime n+1} < p^+$ to należy przyjąć:

$$p^{n+1} = p^+; \qquad V_c^{n+1} = V_c^+ \tag{3.78}$$

b/ jeśli natomiast zaszło $p^{\prime n+1} < p^-$ i $p^{\prime\prime n+1} > p^-$, to:

$$p^{n+1} = p^-; \qquad V_c^{n+1} = V_c^- \tag{3.79}$$

W przypadkach a/ i b/ mamy do czynienia z oscylacjami ciśnień wokół wartości progowych. Oscylacje te przy $\tau_c < \Delta t$ prowadzą właśnie do niefizycznych wyników w jawnym schemacie numerycznym. Proponowany model zastępuje te oscylacje pełzaniem wzdłuż wartości progowych (3.78) i (3.79).

3.7. Analiza stabilności schematu różnicowego, dobór kroków przestrzennych i czasowych, zewnętrznej dyfuzji numerycznej i pseudolepkości.

Na początku niniejszego rozdziału wspomniano już, że nie ma w chwili obecnej możliwości udowodnienia stabilności schematu różnicowego dla nieliniowych układów równań różniczkowych cząstkowych stanowiących bazę złożonych symulacji komputerowych. Sytuacja taka nie może jednak wpływać hamująco na rozwój tego typu prac, z dwóch co najmniej powodów.

Po pierwsze, potrzeby współczesnych eksperymentów wymuszają podejmowanie takich prac bez względu na istnienie lub nieistnienie odpowiednich dowodów natury matematycznej. Poprawność otrzymywanych rezultatów ocenia się z konieczności w sposób "empiryczny", tzn. porównując je z wynikami eksperymentów lub innymi rozwiązaniami teoretycznymi.

Po drugie, schematy niestabilne eliminują się niejako automatycznie z obszarów zainteresowań numeryków - praktyków, gdyż generowane przez nie błędy narastają tak silnie i szybko, że jakiekolwiek sensowne obliczenia nie mogą być przy ich pomocy wykonane.

Schemat różnicowy typu (3.2) jest właśnie przykładem takiego niestabilnego schematu. Okazało się jednakże, że wprowadzając niewielkie modyfikacje tego schematu, ograniczone do równań zachowania pędu, można uczynić go warunkowo stabilnym. W takiej sytuacji celową staje się każda, chociażby bardzo uproszczona i dotycząca zlinearyzowanej postaci równań, próba przeanalizowania stabilności tego schematu. Może ona bowiem zasugerować odpowiedź na dwa pytania:

- co należy zrobić dla zapewnienia stabilności schematu różnicowego ?
- czy krok czasowy wynikający z warunku stabilności nie będzie zbyt mały z punktu widzenia technicznej efektywności obliczeń ?

Załóżmy zatem, że ograniczamy się do analizy płaskiego przepływu "cieczy sprężystej" z pominięciem efektów cieplnych:

$$\frac{d\varrho}{dt} = -\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad (3.80)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} \qquad (3.81)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} \qquad (3.82)$$

$$p = c^2(\varrho - \varrho_0) \qquad (3.83)$$

Podstawiając (3.83) do (3.80) oraz zakładając $\varrho \approx \varrho_0$ dostajemy zlinearyzowaną postać równań wygodną do dalszych analiz:

$$\frac{dp}{dt} = -\varrho_0 c^2\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad (3.84)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial p}{\partial r} \qquad (3.85)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial p}{\partial z} \qquad (3.86)$$

Zgodnie z ogólnym schematem (3.19) można równania (3.84) ÷ (3.86) zapisać w postaci różnicowej:

$$p^{n+1}_{L,K} = p^{n}_{L,K} - \varrho_0 c^2\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z}\right]^n_{L,K}\cdot\Delta t \qquad (3.87)$$

$$u^{n+1}_{L,K} = u^{n}_{L,K}\cdot\lambda - \frac{\Delta t}{\varrho_0}\left[\frac{\partial p}{\partial r}\right]^n_{L,K}\cdot\Delta t \qquad (3.88)$$

$$v^{n+1}_{L,K} = v^{n}_{L,K}\cdot\lambda - \frac{\Delta t}{\varrho_0}\left[\frac{\partial p}{\partial z}\right]^n_{L,K}\cdot\Delta t \qquad (3.89)$$

Współczynnik λ wprowadzony do równań (3.88) i (3.89) będzie szerzej dyskutowany w dalszych rozważaniach. W tym momencie należy tylko zasygnalizować, że symbolizuje on wprowadzoną do schematu zewnętrzną dyfuzję numeryczną, warunkującą jego stabilność.

Rozpatrzmy dalej zachowanie się na siatce numerycznej przykładowej fourierowskiej składowej zaburzenia:

$$p = p_0(t)e^{i(kr+mz)};\quad u = u_0(t)e^{i(kr+mz)};\quad v = v_0(t)e^{i(kr+mz)} \qquad (3.90)$$

Wykorzystując wzory (3.90) można przykładowo wyliczyć:

$$p^{n}_{L,K} = p^{n}_{0}\,e^{i(kr^n_{L,K} + mz^n_{L,K})} \qquad (3.91)$$

$$p^{n+1}_{L,K} = p^{n+1}_{0}\,e^{i(kr^{n+1}_{L,K} + mz^{n+1}_{L,K})} \qquad (3.92)$$

Nieco bardziej kłopotliwe jest wyliczenie pochodnych z wykorzystaniem wzorów (3.90). Musimy w tym celu przyjąć dodatkowe założenie upraszczające, że punkty sąsiednie są regularnie rozłożone na okręgu o promieniu $R = \Delta$. Wówczas pochodne przestrzenne można przedstawić następująco (na przykładzie $\frac{\partial p}{\partial r}$):

$$\left[\frac{\partial p}{\partial r}\right]^n_{L,K} = \frac{p^n_0\, e^{i[k(r^n_{L,K}+\Delta)+mz^n_{L,K}]} - p^n_0\, e^{i[k(r^n_{L,K}-\Delta)+mz^n_{L,K}]}}{2\Delta} \qquad (3.93)$$

i ostatecznie:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial r}\right]^{n}_{L,K} = \frac{p_o^n}{\Delta}\, i\, e^{i(k r^n_{L,K} + m z^n_{L,K})} \sin(k\Delta) \tag{3.94}$$

Oznaczając ponadto:

$$r^{n+1}_{L,K} - r^{n}_{L,K} = \alpha_1; \qquad z^{n+1}_{L,K} - z^{n}_{L,K} = \alpha_2 \tag{3.95}$$

możemy równania (3.87) ÷ (3.89) przedstawić w następującej postaci:

$$p_o^{n+1} e^{i(k\alpha_1 + m\alpha_2)} = p_o^n - \varrho_o c^2 \frac{i\Delta t}{\Delta}\left[u_o^n \sin(k\Delta) + v_o^n \sin(m\Delta)\right] \tag{3.96}$$

$$u_o^{n+1} e^{i(k\alpha_1 + m\alpha_2)} = u_o^n \lambda - \frac{\Delta t}{\varrho_o} p_o^n \frac{i}{\Delta} \sin(k\Delta) \tag{3.97}$$

$$v_o^{n+1} e^{i(k\alpha_1 + m\alpha_2)} = v_o^n \lambda - \frac{\Delta t}{\varrho_o} p_o^n \frac{i}{\Delta} \sin(m\Delta) \tag{3.98}$$

Odpowiednia dla tego schematu tzw. macierz przejścia G jest zdefiniowana następująco:

$$S^{n+1} = G S^n \tag{3.99}$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned} S^{n+1} &= (p_o^{n+1}, u_o^{n+1}, v_o^{n+1}) \\ S^{n} &= (p_o^{n}, u_o^{n}, v_o^{n}) \end{aligned}\right\} \tag{3.100}$$

Wprowadzając dodatkowe oznaczenie:

$$\varphi = k\alpha_1 + m\alpha_2 \tag{3.101}$$

możemy macierz przejścia na podstawie wzorów (3.90) ÷ (3.101) przedstawić następująco:

$$G = e^{-i\varphi}\begin{bmatrix} 1 & -\varrho_o c^2 \frac{i\Delta t}{\Delta}\sin(k\Delta) & -\varrho_o c^2 \frac{i\Delta t}{\Delta}\sin(m\Delta) \\ -\frac{\Delta t}{\varrho_o}\frac{i}{\Delta}\sin(k\Delta) & \lambda & 0 \\ -\frac{\Delta t}{\varrho_o}\frac{i}{\Delta}\sin(m\Delta) & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{3.102}$$

Warunek stabilności określa się żądając aby największa wartość własna g macierzy G była ograniczona następująco:

$$|g| \leqslant 1 \tag{3.103}$$

Odpowiednie równanie na wartości własne macierzy G ma postać:

$$\left[(1-y)(\lambda-y) + \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta^2}\left(\sin^2(k\Delta) + \sin^2(m\Delta)\right)\right](\lambda - y) = 0 \tag{3.104}$$

gdzie:

$$y = g \cdot e^{i\varphi} \tag{3.105}$$

Warunek (3.103) będzie oczywiście równoważny warunkowi:

$$|y| \leqslant 1 \tag{3.106}$$

Równanie (3.104) ma trzy pierwiastki:

$$y_1 = \lambda \tag{3.107}$$

$$y_{2,3} = \frac{1}{2}\left[1 + \lambda \pm \sqrt{(1-\lambda)^2 - 4\frac{c^2\Delta t^2}{\Delta^2}\left(\sin^2(k\Delta) + \sin^2(m\Delta)\right)}\right] \tag{3.108}$$

Jeżeli wyrażenie podpierwiastkowe w (3.108) jest dodatnie, wówczas warunek (3.106) jest spełniony gdy:

$$|\lambda| \leqslant 1 \tag{3.109}$$

W przeciwnym przypadku musi zachodzić:

$$y_2 \cdot y_2^{*} = y_3 \cdot y_3^{*} \leqslant 1 \tag{3.110}$$

czyli

$$\lambda + \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta^2}\left(\sin^2(k\Delta) + \sin^2(m\Delta)\right) \leqslant 1 \tag{3.111}$$

Warunki (3.109) i (3.111) można ostatecznie zapisać łącznie:

$$-1 \leqslant \lambda \leqslant 1 - \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta^2}\left(\sin^2(k\Delta) + \sin^2(m\Delta)\right) \qquad (3.112)$$

Widać teraz jasno, że schemat różnicowy typu (3.19) bez dodatkowych modyfikacji, czyli z $\lambda = 1$ będzie zawsze niestabilny. Warunek (3.112) będzie bowiem niemożliwy do spełnienia dla każdego $\Delta t > 0$.

Dla ścisłości należy dodać, że w rzeczywistości sytuacja jest nieco bardziej skomplikowana. Schemat (3.19) jest bowiem w prezentowanej metodzie nierozerwalnie związany ze sposobem i ilością wybieranych punktów sąsiednich oraz aproksymacją pochodnych przestrzennych. Wybór 8 punktów sąsiednich (w stosunku do 4 dla klasycznej siatki numerycznej) wywołuje już określone "uśrednienie" pól zaburzeń wokół danego punktu czyli wprowadza pewną dyfuzję numeryczną, którą można nazwać "wewnętrzną". Okazało się jednak, że jest ona zbyt mała dla zabezpieczenia stabilności. Z reguły naruszenie stabilności rozpoczyna się w obszarach przyosiowych lub obszarach o silnie nieregularnym rozkładzie punktów sąsiednich.

Z tych też powodów należało dodatkowo zmodyfikować schemat numeryczny, wzbogacając go o tzw. "zewnętrzną dyfuzję numeryczną". Z warunku (3.112) można wywnioskować, że należy zaingerować w człony $u^n_{L,K}$ i $v^n_{L,K}$ występujące w równaniach (3.88) i (3.89). Można przy tym posłużyć się następującym fizycznym wyobrażeniem o tłumieniu pojawiających się fluktuacji. Jeśli w punkcie (L,K) wartości zmiennych zależnych zostały zaburzone w stosunku do średnich wartości z jego lokalnego otoczenia, to można wprowadzić automatyczną korektę tego zaburzenia zastępując np. wartości $u^n_{L,K}$ wyrażeniem:

$$u^n_{L,K} \rightarrow u^n_{L,K} + \lambda'(\bar{u}^n_{L,K} - u^n_{L,K}) \qquad \lambda' - \text{wsp. liczbowy} \qquad (3.113)$$

gdzie: $\bar{u}^n_{L,K}$ - oznacza średnią wartość prędkości w punkcie (L,K), wynikającą z prędkości w jego punktach sąsiednich. Tak

zaproponowana korekta będzie prowadzić do "wygładzania" pól prędkości, a co za tym idzie i pozostałych parametrów. Takiemu, numerycznemu "wygładzaniu" parametrów, odpowiadałyby w układzie równań wyjściowych pewne dodatkowe człony o charakterze dyfuzyjnym i dlatego też efekt takiego "wygładzania" nazywa się często "dyfuzją numeryczną".

Aby móc dalej kontynuować analizę warunku stabilności (3.112) należy określić w (3.113) wartość $\bar{u}^n_{L,K}$ i znaleźć zależność współczynnika λ od λ' i Δ . Zakładając, podobnie jak przy określaniu pochodnych przestrzennych, symetrię w rozkładzie punktów sąsiednich na promieniu Δ , można $\bar{u}^n_{L,K}$ przedstawić następująco:

$$\bar{u}^n_{L,K} = \frac{u^n_o}{4} e^{i(kr^n_{L,K} + mz^n_{L,K})}\left(e^{ik\Delta} + e^{-ik\Delta} + e^{im\Delta} + e^{-im\Delta}\right) \qquad (3.114)$$

i dalej po prostych przekształceniach:

$$\bar{u}^n_{L,K} = u^n_{L,K} \frac{\cos(k\Delta) + \cos(m\Delta)}{2} \qquad (3.115)$$

Podstawiając (3.115) do (3.113) i porównując z (3.88) dostajemy wyrażenie dla λ :

$$\lambda = 1 + \lambda' \left[\frac{1}{2}\left(\cos(k\Delta) + \cos(m\Delta)\right) - 1\right] \qquad (3.116)$$

Warunek stabilności (3.112) można z wykorzystaniem zależności (3.116) przedstawić następująco:

$$\lambda' \left[\frac{1}{2}\left(\cos(k\Delta) + \cos(m\Delta)\right) - 1\right] \geqslant -2 \qquad (3.117)$$

$$\lambda' \left[\frac{1}{2}\left(\cos(k\Delta) + \cos(m\Delta)\right) - 1\right] + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta^2}\left(\sin^2(k\Delta) + \sin^2(m\Delta)\right) \leqslant 0 \qquad (3.118)$$

Z warunku (3.117) wynika, że:

$$0 < \lambda' \leqslant 1 \qquad (3.119)$$

co jest dość oczywistym zakresem zmian wartości liczbowego współczynnika λ'.

Natomiast warunek (3.118) daje już bezpośrednią możliwość oceny kroku czasowego, gwarantującego stabilność schematu numerycznego:

$$\Delta t \leqslant \frac{\Delta\sqrt{\lambda'}}{2c} \tag{3.120}$$

Przy $\lambda' \rightarrow 1$ warunek (3.120) przechodzi w klasyczny warunek stabilności Couranta-Friedrichsa-Lewy'ego dla schematu Laxa.

W wyniku przeprowadzonych analiz uzyskaliśmy więc odpowiedź na postawione na wstępie pytania, odnośnie sposobu zabezpieczenia stabilności metody różnicowej oraz wielkości kroku czasowego warunkującego tę stabilność. Odpowiedź ta ma oczywiście tylko jakościowy charakter i nie wynika z niej praktyczny sposób wprowadzania zewnętrznej dyfuzji numerycznej na nieregularnej sieci punktów obliczeniowych. Tymczasem jest to problem dość istotny, gdyż dyfuzja ta zabezpieczając stabilność i tłumiąc numeryczne fluktuacje metody nie może równocześnie zbyt silnie rozmazywać frontów falowych. W ramach dotychczas wykonywanych badań najlepsze rezultaty uzyskano stosując niżej opisany sposób.

Załóżmy, że pole prędkości w lokalnym otoczeniu punktu (L,K) opisane jest następująco:

$$u^n(r,z) = \bar{u}^n + a_1(r - r^n_{L,K}) + b_1(z - z^n_{L,K}) \tag{3.121}$$

$$v^n(r,z) = \bar{v}^n + a_2(r - r^n_{L,K}) + b_2(z - z^n_{L,K}) \tag{3.122}$$

W odróżnieniu od ekstrapolacji typu (3.7) służącej do obliczania pochodnych przestrzennych zakładamy teraz, że wartości $\bar{u}^n$ i $\bar{v}^n$ są nieznane:

$$u^n(r^n_{L,K}, z^n_{L,K}) = \bar{u}^n \neq u^n_{L,K} \tag{3.123}$$

$$v^n(r^n_{L,K}, z^n_{L,K}) = \bar{v}^n \neq v^n_{L,K} \tag{3.124}$$

Ponadto, nie przeprowadzamy interpolacji położeń i parametrów na promień R względem punktu (L,K), ale pozostajemy przy ich rzeczywistych wartościach. W ten sposób punkt (L,K) nie jest wyróżniony spośród punktów tworzących jego sąsiedztwo. Uzasadnienie takiego postępowania wyniknie z dalszych rozważań.

Utwórzmy zatem wyrażenia:

$$A_1(\bar{u}^n, a_1, b_1) = \sum_{i=1}^{N} \left[u^n(r_i^n, z_i^n) - u_i^n\right]^2 \tag{3.125}$$

$$A_2(\bar{v}^n, a_2, b_2) = \sum_{i=1}^{N} \left[v^n(r_i^n, z_i^n) - v_i^n\right]^2 \tag{3.126}$$

gdzie: r_i^n, z_i^n – położenia punktów sąsiednich w chwili t^n,
u_i^n, v_i^n – wartości składowych prędkości w tych punktach,
$N = 9$ – w przyjętym systemie wyboru ośmiu punktów sąsiednich.

Współczynniki a_1, b_1, a_2, b_2, $\bar{u}^n$ i $\bar{v}^n$ znajdujemy przy pomocy metody najmniejszych kwadratów:

$$\frac{\partial A_1}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial A_1}{\partial b_1} = 0; \quad \frac{\partial A_1}{\partial \bar{u}^n} = 0; \tag{3.127}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial a_2} = 0; \quad \frac{\partial A_2}{\partial b_2} = 0; \quad \frac{\partial A_2}{\partial \bar{v}^n} = 0; \tag{3.128}$$

Wprowadzając następujące oznaczenia:

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^{N} (r_i^n - r^n_{L,K})^2 \tag{3.129}$$

$$\alpha_2 = \sum_{i=1}^{N} (r_i^n - r^n_{L,K})(z_i^n - z^n_{L,K}) \tag{3.130}$$

$$\alpha_3 = \sum_{i=1}^{N} (z_i^n - z^n_{L,K})^2 \tag{3.131}$$

$$\alpha_4 = \sum_{i=1}^{N} (r_i^n - r^n_{L,K}) \tag{3.132}$$

$$\alpha_5 = \sum_{i=1}^{N} (z_i^n - z^n_{L,K}) \tag{3.133}$$

$$\delta_1^1=\sum_{i=1}^{N} u_i^n(r_i^n-r_{L,K}^n);\quad \delta_2^1=\sum_{i=1}^{N} u_i^n(z_i^n-z_{L,K}^n);\quad \delta_3^1=\sum_{i=1}^{N} u_i^n \tag{3.134}$$

$$\delta_1^2=\sum_{i=1}^{N} v_i^n(r_i^n-r_{L,K}^n);\quad \delta_2^2=\sum_{i=1}^{N} v_i^n(z_i^n-z_{L,K}^n);\quad \delta_3^2=\sum_{i=1}^{N} v_i^n \tag{3.135}$$

$$\alpha_{11}=\alpha_3\alpha_4-\alpha_2\alpha_5;\quad \alpha_{22}=\alpha_1\alpha_5-\alpha_2\alpha_4;\quad \alpha_{33}=\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3 \tag{3.136}$$

$$\alpha_{44}=N\alpha_{33}+\alpha_5\alpha_{22}+\alpha_4\alpha_{11} \tag{3.137}$$

możemy wyznaczyć z (3.127) i (3.128) poszukiwane współczynniki:

$$\bar{u}^n=\frac{\delta_1^1\alpha_{11}+\delta_2^1\alpha_{22}+\delta_3^1\alpha_{33}}{\alpha_{44}} \tag{3.138}$$

$$\bar{v}^n=\frac{\delta_1^2\alpha_{11}+\delta_2^2\alpha_{22}+\delta_3^2\alpha_{33}}{\alpha_{44}} \tag{3.139}$$

$$a_1=\frac{(\delta_2^1-\alpha_5\bar{u}^n)\alpha_2-(\delta_1^1-\alpha_4\bar{u}^n)\alpha_3}{\alpha_{33}} \tag{3.140}$$

$$b_1=\frac{(\delta_1^1-\alpha_4\bar{u}^n)\alpha_2-(\delta_2^1-\alpha_5\bar{u}^n)\alpha_1}{\alpha_{33}} \tag{3.141}$$

$$a_2=\frac{(\delta_2^2-\alpha_5\bar{v}^n)\alpha_2-(\delta_1^2-\alpha_4\bar{v}^n)\alpha_3}{\alpha_{33}} \tag{3.142}$$

$$b_2=\frac{(\delta_1^2-\alpha_4\bar{v}^n)\alpha_2-(\delta_2^2-\alpha_5\bar{v}^n)\alpha_1}{\alpha_{33}} \tag{3.143}$$

Jeśli punkt (L,K) jest tzw. punktem przyosiowym (punkt B lub C na rys.11) to korzystając z warunków na osi symetrii należy następująco zmodyfikować wyrażenia (3.138) ÷ (3.143):

$$\bar{u}^n=\frac{\delta_3^1 r_{L,K}^n}{N r_{L,K}^n+\alpha_4};\quad a_1=\frac{\delta_3^1}{N r_{L,K}^n+\alpha_4};\quad b_1=0 \tag{3.144}$$

$$\bar{v}^n=\frac{\delta_2^2\alpha_5-\delta_3^2\alpha_3}{\alpha_5^2-N\alpha_5};\quad a_2=0;\quad b_2=\frac{\delta_3^2\alpha_5-N\delta_2^2}{\alpha_5^2-N\alpha_3} \tag{3.145}$$

Rozważmy jeszcze raz zależności $\frac{\partial A_1}{\partial \bar{u}^n}=0$ i $\frac{\partial A_2}{\partial \bar{v}^n}=0$, które po wykonaniu operacji różniczkowania przyjmują następującą postać:

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\bar{u}^n+a_1(r_i^n-r_{L,K}^n)+b_1(z_i^n-z_{L,K}^n)\right]=\sum_{i=1}^{N} u_i^n \tag{3.146}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\bar{v}^n+a_2(r_i^n-r_{L,K}^n)+b_2(z_i^n-z_{L,K}^n)\right]=\sum_{i=1}^{N} v_i^n \tag{3.147}$$

Jeżeli przyjąć, że każdemu z N punktów przyporządkowana jest taka sama masa, to ze związków (3.146) i (3.147) wynika, że pęd punktów rzeczywistych (u_i^n, v_i^n) jest równy pędowi punktów na płaszczyźnie interpolacyjnej (3.121) i (3.122). Innymi słowy jeśli każdemu z N punktów dodamy pęd:

$$\Delta p_i^u=\lambda'\left[\bar{u}^n+a_1(r_i^n-r_{L,K}^n)+b_1(z_i^n-z_{L,K}^n)-u_i^n\right] \tag{3.148}$$

$$\Delta p_i^v=\lambda'\left[\bar{v}^n+a_2(r_i^n-r_{L,K}^n)+b_2(z_i^n-z_{L,K}^n)-v_i^n\right] \tag{3.149}$$

to pęd układu N punktów nie ulegnie zmianie, bo z (3.146) i (3.147) wynika, że:

$$\sum_{i=1}^{N}\Delta p_i^u=0;\qquad \sum_{i=1}^{N}\Delta p_i^v=0; \tag{3.150}$$

Współczynnik λ' ma ten sam sens co współczynnik wprowadzony do związku (3.113). W ten sposób wprowadzona dyfuzja numeryczna ma "nielokalny" charakter. Wprowadzając korektę prędkości w punkcie (L,K) korygujemy równocześnie rozkłady prędkości w całym sąsiedztwie tego punktu:

$$u_i^n\longrightarrow u_i^n+\Delta p_i^u \tag{3.151}$$

$$v_i^n\longrightarrow v_i^n+\Delta p_i^v \tag{3.152}$$

gdzie: $1\le i\le N$.

Dyfuzja o charakterze lokalnym wymaga stosowania relatywnie większych współczynników λ' i niekiedy bywa zawodna, zwłaszcza w obszarach przyosiowych.

Dla prezentowanych w pracy przykładowych rozwiązań przyjmowano następujące wartości współczynnika λ':

$$\lambda' = 4 \cdot 10^{-2} \frac{D\Delta t}{R} \tag{3.153}$$

- dla materiału wybuchowego

$$\lambda' = 5 \cdot 10^{-2} \frac{c \cdot \Delta t}{R} \tag{3.154}$$

- dla miedzianych wkładek kumulacyjnych.

Na osobną uwagę zasługuje zaproponowana zależność współczynnika λ' od kroku czasowego Δt. Wynika ona stąd, że w praktyce krok czasowy zmienia się w dość szerokich granicach i należy wyeliminować formalne wygładzanie rozkładów prędkości przy $\Delta t \to 0$ (aby zachodziło $u^{n+1}_{L,K} \to u^{n}_{L,K}$ przy $\Delta t \to 0$ musi zachodzić $\lambda' \to 0$).

Wprowadzona do schematu dyfuzja numeryczna umożliwia również modelowanie procesów propagacji frontów fal uderzeniowych, rozmywając je na szerokość kilku kroków przestrzennych. Okazało się jednakże, że wymaga to stosowania większych wartości współczynników λ' niż są potrzebne do utrzymania stabilności i eliminacji przypadkowych fluktuacji. Aby uniknąć tego niepożądanego efektu, polegającego na zbyt silnym "wygładzaniu" wyników w całym rozważanym obszarze, można nie podwyższając współczynnika λ', wprowadzić dodatkowo do schematu numerycznego pseudolepkość. Wystarcza przy tym użycie prostej, skalarnej postaci pseudolepkości:

$$p_s = \begin{cases} const \cdot \varrho R^2 (div\, \vec{w})^2 & dla \quad div\, \vec{w} < 0 \\ 0 & dla \quad div\, \vec{w} > 0 \end{cases} \tag{3.155}$$

Na zakończenie rozważań zawartych w tym punkcie należy jeszcze omówić problem doboru kroków czasowych i przestrzennych. Krok czasowy zapewniający stabilność algorytmu obliczeniowego dobrano na drodze badań testowych, odpowiednio rozbudowując jakościową formułę (3.120):

$$\Delta t = \min \left\{ \frac{R}{2} \sqrt{\left| \frac{\varrho^{n+1}_{L,K} - \varrho^{n}_{L,K}}{p^{n+1}_{L,K} - p^{n}_{L,K}} \right|} \; \xi \right\} \tag{3.156}$$

$$\xi = 1{,}5 - 0{,}5 \frac{p^{n+1}_{L,K}}{p^*} \; ; \qquad 0{,}1 \leq \xi \leq 1 \tag{3.157}$$

gdzie: p^* - ciśnienie odniesienia (praktycznie przyjmowano $p^* = p_H$).

Punkt (L,K) w którym wyrażenie (3.156) osiąga (po wykonaniu każdego cyklu obliczeniowego $t^n \to t^{n+1}$) najmniejszą wartość decyduje o kroku czasowym dla całego algorytmu.

Krok przestrzenny R, rozumiemy jako średnią odległość punktów obliczeniowych, zależy oczywiście od ilości punktów, którą możemy pokryć badane ciało uwzględniając moc obliczeniową wykorzystywanej EMC. W dotychczasowych badaniach z wykorzystaniem EMC R-60, liczba punktów obliczeniowych nie przekraczała 1500 (łącznie dla materiału wybuchowego i wkładki). Odległość najmniejszego zbliżenia R_{min} przyjmowano bliską 0.25 R.

Celem zminimalizowania ilości ingerencji w proces obliczeniowy, wynikających z eliminacji niestabilności kątowych, stosowano sieć przestrzenną specjalnie zagęszczoną wzdłuż linii brzegowych. Efekt ten jest dobrze widoczny na rysunkach zamieszczonych w następnym rozdziale, a przedstawiających powiększone sieci numeryczne.

3.8. Organizacja procesu obliczeniowego.

W ramach dotychczasowych rozważań zawartych w niniejszym rozdziale, przedstawiono koncepcję numerycznego rozwiązania układu równań różniczkowych opisujących sprzężone procesy detonacji materiałów wybuchowych oraz deformowania i napędzania przez nie ciał stałych. Aby móc tę koncepcję zweryfikować, ocenić jej wady i zalety, zbadać zakresy zastosowań metody, a w dalszej kolejności uzyskiwać rozwiązania konkretnych problemów, należało zbudować odpowiedni dla tej koncepcji kod komputerowy. Nazwą "kod komputerowy" przyjęto określać w literaturze programy komputerowe służące do rozwiązywania wielowymiarowych, niestacjonarnych problemów fizyki matematycznej, ze względu

na ich złożoność od strony matematyczno-fizycznej oraz numerycznej i technicznej.

Właśnie problemom natury technicznej, a więc związanym z organizacją procesu obliczeniowego i budową samego programu, należałoby poświęcić jeszcze nieco uwagi. Niestandardowość metody pociągnęła bowiem za sobą konieczność stosowania specyficznych rozwiązań technicznych. Rozwiązania te omówione zostaną ogólnie i tylko od strony ideowej, gdyż sam program i jego eksploatacja to odrębny, dość złożony i jednocześnie zbyt szczegółowy problem, aby włączać go w ramy rozważań niniejszej pracy.

Podstawowe znaczenie dla funkcjonowania kodu numerycznego ma problem przechowywania, przesyłania oraz uaktualniania informacji o stanie ośrodka w każdym punkcie obliczeniowym. Najprościej problem ten można rozwiązać umieszczając te informacje w odpowiednich tablicach, dla których rezerwuje się określone obszary pamięci operacyjnej komputera. Tablice te, ze względu na ich funkcje, można podzielić na cztery grupy.

Do pierwszej grupy należy zaliczyć tablice służące do przechowywania wartości zmiennych zależnych w każdym punkcie, w chwili t^n i t^{n+1}. Mają one postać: PTS(L,K,N) i PT(L,K,N). Punkty obliczeniowe pokrywające badany obszar ponumerowano dzieląc je na linie i porządkując je wzdłuż tych linii. Para liczb (L,K) oznacza więc K-ty punkt z L-tej linii i może być traktowana jako jego lagrange'owskie współrzędne. W trzeciej kolumnie przechowywane są wartości zmiennych zależnych, np.

$$\left.\begin{aligned} &PTS(L,K,1) = r^n_{L,K} ; && PT(L,K,1) = r^{n+1}_{L,K} ; \\ &PTS(L,K,3) = \varrho^n_{L,K} ; && PT(L,K,3) = \varrho^{n+1}_{L,K} ; \\ &PTS(L,K,5) = v^n_{L,K} ; && itd. \end{aligned}\right\} \quad (3.158)$$

Wymiary tych tablic są zdeterminowane liczbą punktów obliczeniowych i ilością zmiennych zależnych. Po wykonaniu obliczeń na kroku t^{n+1} następuje podstawienie wartości z tablicy PT do tablicy PTS, a do tablicy PT można już wpisać nowe wartości z kroku t^{n+2}.

Do drugiej grupy należy zaliczyć dwie tablice, w których przechowywane są informacje o numerach punktów tworzących sąsiedztwo punktu obliczanego. Pierwsza z nich ma postać: NDKT(L,K,N), a informację w niej zakodowaną należy rozumieć następująco:

$$\begin{aligned} &NDKT(L,K,1) = L1 && NDKT(L,K,3) = L2 \\ &NDKT(L,K,2) = K1 && NDKT(L,K,4) = K2 \end{aligned} \quad (3.159)$$

Punkty o numerach (L1,K1), (L2,K2), itd. tworzą najbliższe sąsiedztwo punktu (L,K). Dzięki tej tablicy każdy punkt "pamięta" numery swych punktów sąsiednich, a więc i automatycznie ich parametry, np. położenie punktu (L1,K1) znajdujemy następująco:

$$\begin{aligned} r_1^n &= PTS[NDKT(L,K,1), NDKT(L,K,2), 1] \\ z_1^n &= PTS[NDKT(L,K,1), NDKT(L,K,2), 2] \end{aligned} \quad (3.160)$$

Proces wymiany punktów sąsiednich zostaje w kodzie numerycznym zarejestrowany przez zmianę numerów punktów pamiętanych w trzeciej kolumnie tablicy NDKT.

Problem numerycznej aproksymacji warunków brzegowych wymaga aby punkty tworzące brzeg były odróżnialne od punktów wewnętrznych, a ponadto aby każdy punkt brzegowy "pamiętał" najbliższe sobie punkty brzegowe. Wymagania te można spełnić wprowadzając tablicę "sąsiednich punktów brzegowych" typu: NBRZ(L,K,N). W trzeciej kolumnie tej tablicy zapamiętywane są numery identyfikacyjne "sąsiadów brzegowych" analogicznie jak w relacjach (3.159). Punkty wewnętrzne można dzięki tej tablicy łatwo odróżniać od brzegowych, gdyż dla punktu brzegowego NBRZ(L,K,1)=L1≠0, a gdy punkt (L,K) jest punktem wewnętrznym, to można np. zadać NBRZ(L,K,1)=0. Zawartość tablicy NBRZ jest korygowana, gdy zachodzi wyeliminowanie z obliczeń punktu

brzegowego, zamiana punktu wewnętrznego na brzegowy lub przy modelowaniu fragmentowania się ośrodka.

Trzecią grupę tablic tworzą tablice pomocnicze, w których zapamiętywane są informacje nie mające tak podstawowego znaczenia dla procesu obliczeniowego, ale przydatne z różnych technicznych powodów. Przykładowo, są to informacje o:

-czasie dojścia frontu fali detonacyjnej do poszczególnych punktów reprezentujących materiał wybuchowy,

-położeniach punktów fikcyjnych związanych z poszczególnymi punktami brzegowymi,

-poprawkach do rozkładów prędkości wnoszonych przez zewnętrzną dyfuzję numeryczną.

Wreszcie, czwarta grupa tablic, to tablice o wyraźnie pomocniczym charakterze, służące do chwilowego przechowywania pewnych wielkości, aby uniknąć ich wielokrotnego obliczania itp.

Kod komputerowy został napisany w języku FORTRAN i ma typową dla tego języka strukturę - składa się z programu głównego i wywoływanych z niego podprogramów. Informacje o zawartości wymienionych wyżej tablic oraz o wartościach różnych współczynników są przekazywane do podprogramów za pomocą instrukcji COMMON.

Scharakteryzujmy zatem krótko podstawowe funkcje jakie spełnia program główny i poszczególne, ważniejsze podprogramy. Symbole tablic i podprogramów odpowiadają symbolom używanym w kodzie numerycznym.

1. Program główny (MAIN).

a/ Deklaracja struktur podstawowych tablic.

b/ Wprowadzenie części danych początkowych i współczynników określających:
- wielkości kroków przestrzennych i czasowych,
- częstości i sposoby wywoływania podprogramów,
- wymiary sieci numerycznych dla materiału wybuchowego i wkładki kumulacyjnej,
- równania stanu, model Steinberga, wartości w punkcie C-J,

- wielkości zewnętrznej dyfuzji numerycznej i pseudolepkości,
- sposoby sterowania pracą całego programu.

c/ Wywoływanie poszczególnych podprogramów.

d/ Wymiana zawartości tablic typu: PTS=PT, po wykonaniu pełnego cyklu obliczeniowego na danym kroku czasowym.

e/ Dobór kroku czasowego.

f/ Korekta rozkładów prędkości związana z zewnętrzą dyfuzją numeryczną.

g/ Organizacja wydruków i zapisów wyników pośrednich w pamięci dyskowej.

2. Podprogram wyboru punktów sąsiednich (SAS).

a/ Ustalenie zbiorów punktów sąsiednich w chwili początkowej.

b/ Tworzenie dla każdego punktu podzbioru najbliższych punktów sąsiednich.

c/ Eliminacja z podzbioru najbliższych punktów sąsiednich punktów nie mogących tworzyć fizycznego sąsiedztwa z danym punktem (podrozdział 3.2).

d/ Podział podzbioru najbliższych punktów sąsiednich na sektory kątowe.

e/ Wybór najbliższych punktów sąsiednich z poszczególnych sektorów.

3. Podprogram obliczania wartości zmiennych zależnych po upływie kroku czasowego Δt (PTZV).

a/ Ustalenie położeń i wartości zmiennych zależnych w punktach sąsiednich na płaszczyźnie czasowej t^n.

b/ Interpolacja położeń i parametrów punktów sąsiednich na promień R.

c/ Obliczanie pochodnych przestrzennych składowych pól prędkości i naprężeń.

d/ Ustalanie położeń punktów fikcyjnych dla punktów brzegowych i korekta pochodnych przestrzennych wynikająca z wartości brzegowych zadawanych w punktach fikcyjnych.

e/ Obliczanie pochodnych i średnich wartości pól prędkości związane z zewnętrzną dyfuzją numeryczną.

f/ Wyszukiwanie najbliższych punktów sąsiednich z drugiego ośrodka na powierzchni kontaktu: produkty detonacji - wkładka kumulacyjna. Konstrukcja wzajemnych pól prędkości i ciśnień dla realizacji warunku brzegowego na tej powierzchni.

g/ Obliczanie efektów związanych z lepko-plastycznym płynięciem materiału i tworzeniem się szczelin w/g specjalnych (podrozdział 3.5 i 3.6) algorytmów.

h/ Ostateczne wyliczanie nowych wartości zmiennych zależnych na płaszczyźnie czasowej t^{n+1}.

4. Podprogram służący do budowy początkowej sieci punktów obliczeniowych i zadania warunków początkowych (WARP1).

a/ Budowa sieci położeń początkowych dla punktów reprezentujących materiał wybuchowy i wkładkę.

b/ Wprowadzenie wartości odpowiadających warunkom początkowym do odpowiednich tablic.

c/ Konstrukcja tablicy "sąsiedztwa brzegowego" - NBRZ.

5. Podprogram eliminacji niestabilności zbliżeniowych (BRZEG).

a/ Eliminacja punktu wewnętrznego przy niestabilności zbliżeniowej typu: punkt wewnętrzny - punkt wewnętrzny.

b/ Eliminacja punktu wewnętrznego przy niestabilności zbliżeniowej typu: punkt wewnętrzny - punkt brzegowy.

c/ Eliminacja punktu brzegowego przy niestabilności zbliżeniowej typu: punkt brzegowy - punkt brzegowy (korekta tablicy NBRZ).

6. Podprogram eliminacji niestabilności kątowych (BRZEG1).

a/ Kontrola sieci numerycznej dla identyfikacji punktów zagrożonych możliwością pojawienia się niestabilności kątowych.

b/ Zamiana punktów wewnętrznych na punkty brzegowe dla uniknięcia niestabilności kątowych (korekta tablicy NBRZ).

7. Podprogram eleminacji punktów brzegowych w obszarach zagrożonych patologicznymi deformacjami kształtów linii brzegowych (BRZEK).

a/ Kontrola stanu deformacji linii brzegowych.

b/ Usuwanie z obliczeń punktów zagrożonych niestabilnościami (korekta tablicy NBRZ).

Mimo, że wymieniono tylko (abstrahując od sposbów realizacji) najważniejsze podprogramy i ich podstawowe funkcje, widać, iż kod komputerowy różni się znacznie od "programu komputerowego" w potocznym tego słowa znaczeniu. Kod komputerowy jest zespołem wielu, często dosyć złożonych programów wzajemnie ze sobą współpracujących i realizujących poszczególne elementy składowe pełnego modelu numerycznego badanego zjawiska.

Tymi uwagami można już zakończyć omawianie kompleksu problemów związanych z matematyczno - fizyczno - numerycznym modelowaniem zjawisk kumulacyjnych i przejść do omówienia przykładowych wyników symulacji komputerowych.

Rozdział 4

PRZYKŁADOWE WYNIKI SYMULACJI KOMPUTEROWYCH

Przedstawione w poprzednich rozdziałach równania oraz sposób ich numerycznego rozwiązania mogą być wykorzystane do modelowania komputerowego bardzo szerokiej klasy zjawisk fizycznych dających się opisać równaniami mechaniki ośrodków ciągłych. Cel niniejszej pracy spowodował oczywiście ograniczenie się w dotychczasowych badaniach do klasy zjawisk kumulacyjnych i tych też zjawisk będą dotyczyć głównie prezentowane rozwiązania. Jednakże, aby udowodnić szersze możliwości zastosowań proponowanej metody, zademonstrowano w trzecim punkcie niniejszego rozdziału przykład dotyczący modelowania przebijania osłony ciałem odkształcalnym. Wybór tego zjawiska był nieprzypadkowy, gdyż zagadnienia kumulacji i przebijania osłon muszą być w przyszłości traktowane łącznie, aby móc w pełni ocenić efektywność badanych układów kumulacyjnych.

W rozdziale niniejszym wyniki obliczeń teoretycznych zostaną skonfrontowane z wynikami specjalnie w tym celu wykonanych w IFPiLM eksperymentów. Dokonane zostaną również odpowiednie porównania wyników obliczeń numerycznych z wynikami, które można otrzymać w oparciu o klasyczną teorię kumulacji lub wynikami teoretyczno - eksperymentalnymi zawartymi w literaturze.

4.1. "Kumulacja odwrotna".

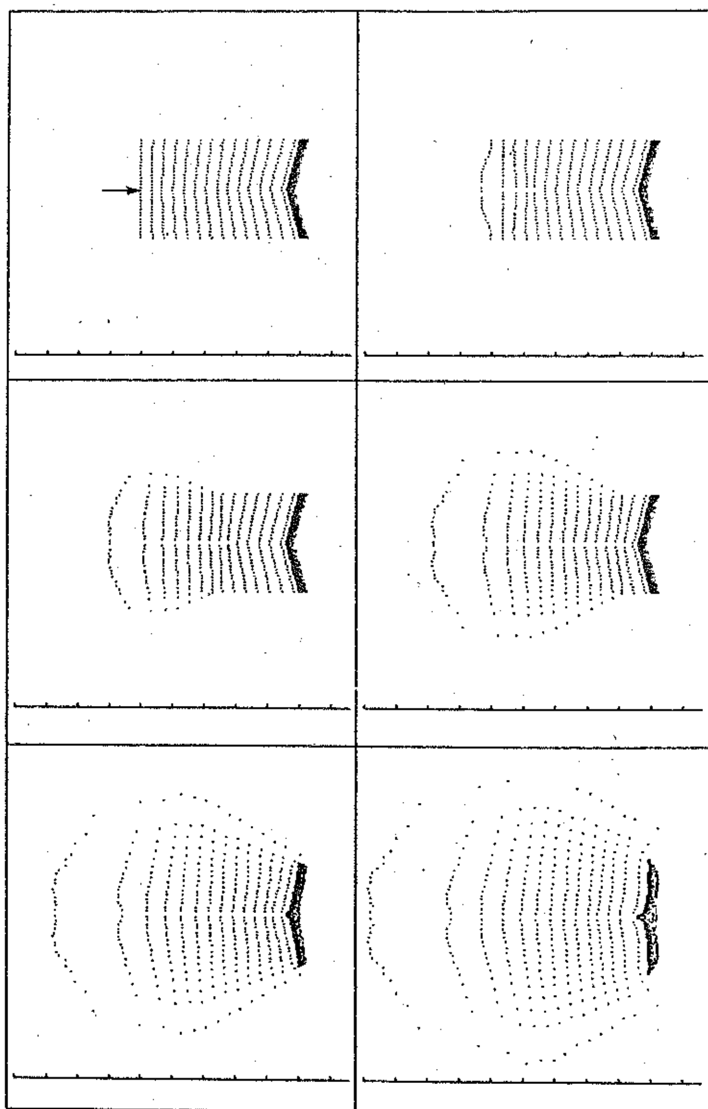
Zjawisko "kumulacji odwrotnej" (wybuchowego kształtowania pocisków) zostało od strony jakościowej omówione w rozdziale I. Wspomniano tam również, że zjawisko to zainspirowało podjęcie tematu niniejszej pracy i stanowiło podstawę, na której budowano zarówno model matematyczno - fizyczny jak i metodę oraz kod numeryczny [3,28]. Weryfikację wyników teoretycznych i

eksperymentalnych prowadzono w oparciu o fotografie wybuchowo ukształtowanych pocisków, których charakterystyki (kształty, wymiary, prędkości) zależały od aktualnych celów i potrzeb niezależnie prowadzonych eksperymentów. Natomiast przykład przedstawiony w pracy niniejszej dotyczy układu specjalnie zaprojektowanego (wymiary, masa materiału wybuchowego) z myślą o teoretyczno - eksperymentalnej weryfikacji wyników. Jego wymiary pozwalają bowiem, aby oprócz rejestracji optycznych, można było w przyszłości wykonać dla niego odpowiednie badania z wykorzystaniem laboratoryjnych urządzeń rentgenowskich.

Kształt oraz wymiary tego modelowego układu do badania zjawiska "kumulacji odwrotnej" przedstawiono na pierwszym kadrze rysunku nr 16.
Średnica wkładki wynosi 3 cm, grubość 0.25 cm, a kąt rozwarcia - $2\alpha = 150°$. Na tym oraz na dalszych rysunkach tego typu naniesiono podziałkę, której jednostka odpowiada zawsze długości równej - 1 cm. Do konstrukcji układu wykorzystano termoplastyczny materiał wybuchowy, którego właściwości fizyko-chemiczne opisano równaniem stanu typu (2.7) i przyjęto:

$$C = 1,8 \cdot 10^{10} \frac{cm^8}{g^2 s^2} \; ; \qquad \sigma = 0,3 \tag{4.1}$$

Punkty, z których utworzone są poszczególne kadry na rys.16, są wykorzystywanymi w metodzie numerycznej materialnymi punktami ośrodka, tworzącymi odpowiednią sieć numeryczną. Zgodnie z przyjętą metodą przemieszczają się one wraz z ośrodkiem, a więc dobrze ilustrują proces jego deformowania się. Kolejne kadry na rys.16 zostały wykonane w stałych odstępach czasowych (2 μs). Na pierwszym kadrze (t=0) zaznaczono strzałką punkt, który przyjęto jako centrum inicjacji sferycznej fali detonacyjnej. Ostatni kadr ilustruje sytuację, w momencie, w którym ciśnienie produktów detonacj w żadnym punkcie nie przekracza wartości około 5 kbar.
Z licznych eksperymentów komputerowych wynika, że w takim przypadku można już w dalszych obliczeniach nie uwzględniać wpływu produktów detonacji na wkładkę kumulacyjną.



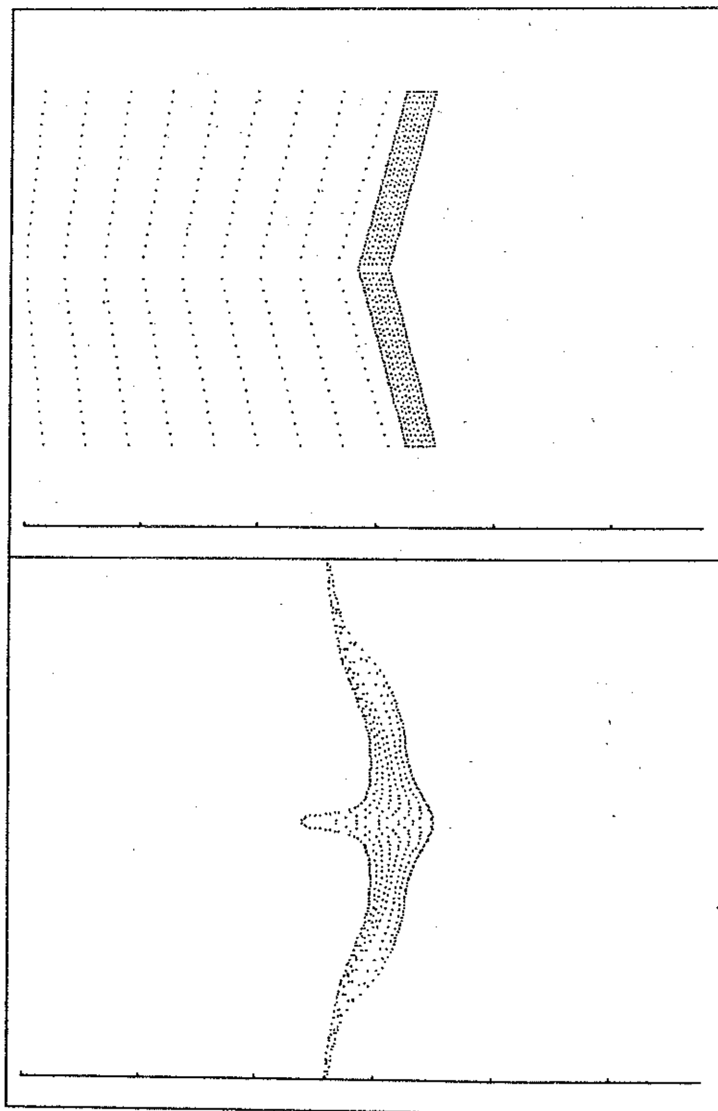
Rys. 16. Ilustracje czasowo-przestrzennych deformacji sieci numerycznych pokrywających materiał wybuchowy i wkładkę kumulacyjną. Odstęp czasowy między kadrami - 2μs.

Wyeliminowanie z dalszych obliczeń produktów detonacji ma duże znaczenie praktyczne, gdyż umożliwia znaczne skrócenie i uproszczenie tych obliczeń.

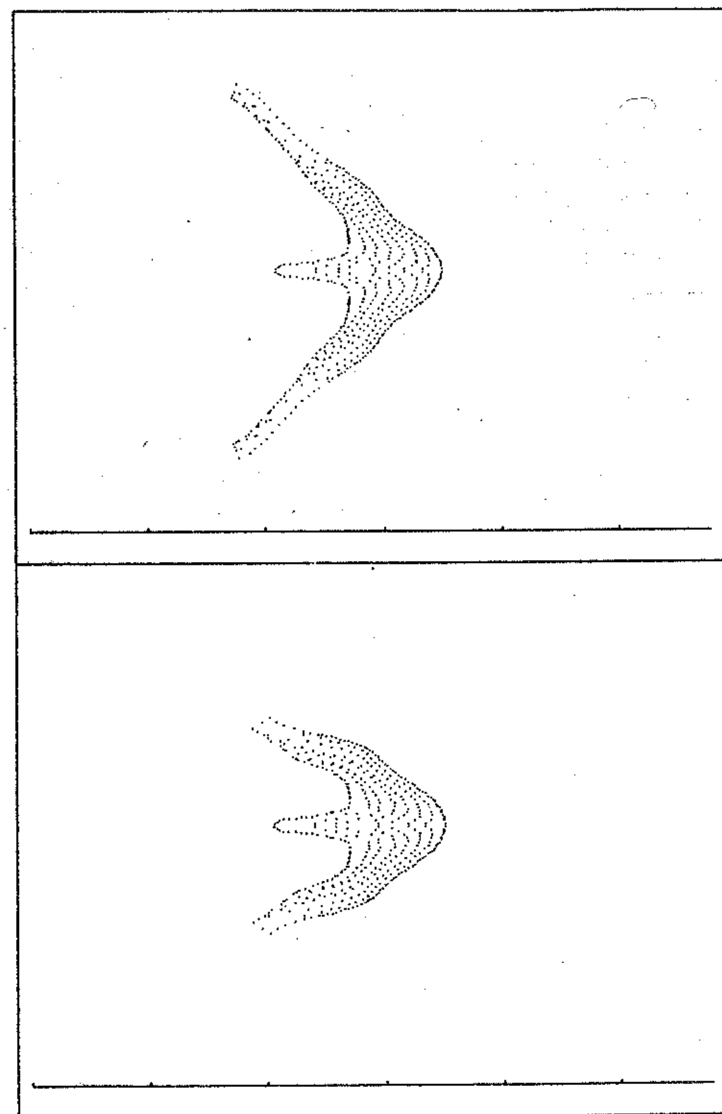
Ilustracje przedstawione na rys.16 miały na celu pokazanie przede wszystkim (ze względu na skale przestrzenne zjawisk) kształtów rozprężającego się obłoku produktów detonacji. Aby dokładnie prześledzić zmiany kształtu wkładki oraz zilustrować dalsze fazy zjawiska pokazano na rys.17, 18 i 19 deformację sieci punktów w dużej skali przestrzennej i z większymi odstępami czasowymi między kadrami (16 μs).

Na rys.17 widzimy wkładkę w stanie niezaburzonym (pierwszy kadr) oraz po napędzeniu i wstępnej deformacji (drugi kadr). Drugi kadr z rys.17 oraz pierwszy kadr z rys.18 pokazują, że badany proces ma w tej fazie pewne cechy "odwrotnego procesu kumlacji". Wkładka jest bowiem nachylona do osi pod kątem, który w przeciwieństwie do kumulacji klasycznej, jest większy od 90°. Ponadto występują tam elementy przypominajace zbitek i strumień, z tą jednak różnicą, że w kierunku przegrody (z lewa na prawo) pierwszy podąża zbitek, a dopiero za nim szczątkowy strumień. Okazuje się jednakże, że dla dalszych chwil czasu analogie z klasyczną teorią kumulacji już nie występują. Następuje bowiem wyrównanie prędkości "zbitka" i "strumienia" i zakończenie procesu deformowania się wkładki w otoczeniu osi. Z pewnym opóźnieniem zostaje wyhamowany ruch ramion wkładki w kierunku osi i wyrównanie prędkości poosiowej. W rezultacie, w kierunku przegrody porusza się jedno ciało, którego kształt nie zmienia się już w dalszych chwilach czasu (U=0, V=const). Kształt ten widoczny jest na drugim kadrze rysunku 19.

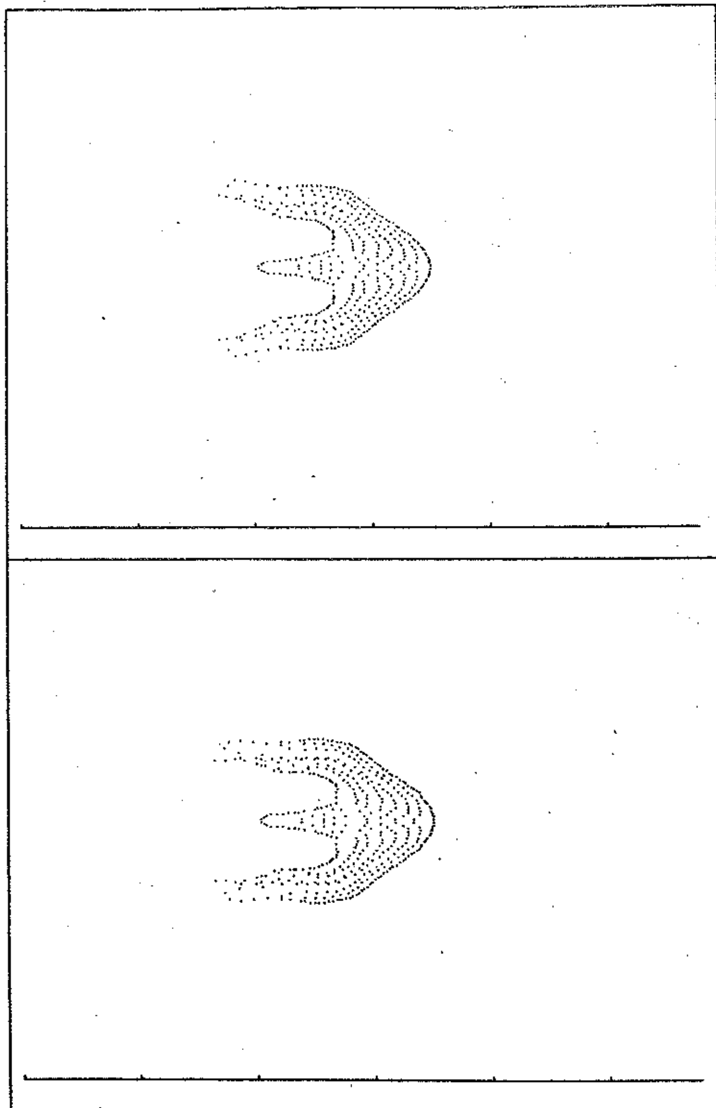
Okazuje się więc, że omawiane zjawisko ma jakby dwie fazy: hydrodynamiczną i wytrzymałościową. W fazie hydrodynamicznej występują stosunkowo duże gradienty prędkości i znaczne siły bezwładności w stosunku do sił wytrzymałościowych ($\rho u^2 \gg Y$). Wkładka kumulacyjna ma w tej fazie własności podobne do cieczy i to jest powodem, że zachowuje się ona w sposób zgodny jakościowo z klasyczną teorią kumulacji.



Rys. 17, 18 ,19. Deformacje sieci numerycznej pokrywającej wkładkę kumulacyjną. Odstęp czasowy między kadrami-16 μs.



Rys. 18.



Rys. 19.

Gradienty prędkości przy wkładkach o dużych kątach rozwarcia nie są jednak na tyle duże, aby po pewnym czasie nie zostały wyrównane pod wpływem sił wytrzymałościowych. Faza hydrodynamiczna przechodzi więc w sposób ciągły w fazę wytrzymałościową, w której efekty sprężysto - lepko - plastyczne decydują o ostatecznycznym kształcie zdeformowanej wkładki. Rozwiązanie komputerowe dostarcza więc dodatkowego argumentu na rzecz zastępowania w przyszłości terminu "odwrotna kumulacja" odpowiedniego tylko dla hydrodynamicznej fazy zjawiska, terminem "wybuchowe kształtowanie i napędzanie pocisków" obejmującym obie fazy procesu.

Analizując poszczególne kadry przedstawione na rys.17÷19 można się zorientować, że dwukrotnie w trakcie obliczeń przeprowadzono operację oderwania brzegowych fragmentów wkładki. Należy więc udzielić odpowiedzi na kilka pytań dotyczących zarówno celów jak i sposobów przeprowadzania takich operacji.

W trakcie obliczeń okazało sie, że dla układów o geometrii ładunku i wkładki zbliżonej do przedstawianych na rys.16 występuje zawsze efekt odrywania się brzegów wkładki od jej zasadniczej części. Można przy tym wyróżnić jakby dwie fazy tego zjawiska. W pierwszej fazie stosunkowo niewielka masa tworzaca brzeg wkładki uzyskuje pod wpływem ciśnienia produktów detonacji prędkość u >0, a więc ekspanduje na zewnątrz układu. Prędkość tej ekspansji jest zbyt duża aby siły wytrzymałościowe były zdolne zapobiec oderwaniu się tego fragmentu. Natomiast w drugiej fazie ma miejsce bardziej długotrwały proces dalszego fragmentowania się brzegów wkładki, spowodowany zbyt małą prędkością poosiową v tych fragmentów w stosunku do prędkości zasadniczej części wkładki.

Operacja wyeliminowania z obliczeń fragmentu, który fizycznie oderwał się od wkładki, jest niezbędna jeśli oczekujemy zgodności wyników teoretycznych i eksperymentalnych dla dalszych faz zjawiska. Wynika to stąd, że jeśli fragment taki nie zostanie wyeliminowany z obliczeń, to pochodne

przestrzenne będą liczone dalej w oparciu o punkty reprezentujące ten fragment, a więc punkty wkładki sąsiadujące z tym fragmentem będą się znajdowały w niefizycznych polach naprężeń i prędkości. Rozbieżności między eksperymentem komputerowym a eksperymentem fizycznym będą w takiej sytuacji narastały nawet wówczas, gdy fragment taki można uznać za obłok nieoddziaływujących odłamków ($\sigma_{ik} = 0$, $\rho \ll \rho_o$).

Załóżmy chwilowo, że potrafimy wskazać obszary (punkty), w których nastąpiło zniszczenie materiału. Operację oddzielenia fragmentu od wkładki można przeprowadzić tylko wówczas, gdy zniszczenie materiału nastąpiło w obszarze całego przekroju poprzecznego ramion wkładki. Punkty reprezentujące oderwany fragment eliminuje się z dalszych obliczeń. Dla pozostałych punktów ustala się nowe tablice sąsiedztwa i sąsiedztwa brzegowego i obliczenia mogą być dalej kontynuowane.

Do omówienia, w ramach tego problemu, pozostało jeszcze zagadnienie kryteriów jakie były przyjmowane dla określenia miejsc, w których nastąpiło zniszczenie materiału. Ponieważ w zależności od czynników zewnętrznych oraz własności materiałowych zniszczenie może mieć charakter ciągliwy (duża deformacja plastyczna ε^p wewnątrz ziaren), kruchy (wzrost objętości szczelin w przestrzeniach między ziarnami) lub najczęściej mieszany, wprowadzono dwa kryteria zniszczenia. Jedno jest określone przez krytyczną wartość deformacji plastycznej ε^p_{kr}, a drugie przez krytyczną wartość objętości szczelin $(V_c)_{kr}$. Jeśli w jakimś punkcie ośrodka zaszło:

$$\varepsilon^p > \varepsilon^p_{kr} \quad \text{lub} \quad V_c > (V_c)_{kr} \tag{4.2}$$

to przyjmowano, że w tym punkcie nastąpiło zniszczenie materiału. Na podstawie badań własnych oraz sugestii literaturowych przyjmowano dla miedzianych wkładek kumulacyjnych w obszarach niezbyt wysokich temperatur (typowe temperatury w obszarach fragmentacji są rzędu (500 ÷ 600 K):

$$\varepsilon^p_{kr} = 1 \div 1{,}2; \qquad (V_c)_{kr} = 4 \cdot 10^{-2}\ \frac{cm^3}{g} \tag{4.3}$$

Na rys.20 przedstawiono dla omawianego przykładu sytuację w momencie pierwszej, a na rys.21 drugiej fragmentacji. Na obu rysunkach zaznaczono linię, którą przyjęto za oddzielającą oderwany fragmnt od pozostałej części wkładki oraz naniesiono w jej otoczeniu wartości ε^p i V_c. Widać, że w otoczeniu linii fragmentacji zachodzi na rys.20:

$\varepsilon^p > \varepsilon^p_{kr}$; $V_c \ll (V_c)_{kr}$ - na powierzchni wewnętrznej (od strony materiału wybuchowego),

$\varepsilon^p \lessapprox \varepsilon^p_{kr}$; $V_c > (V_c)_{kr}$ - na powierzchni zewnętrznej,

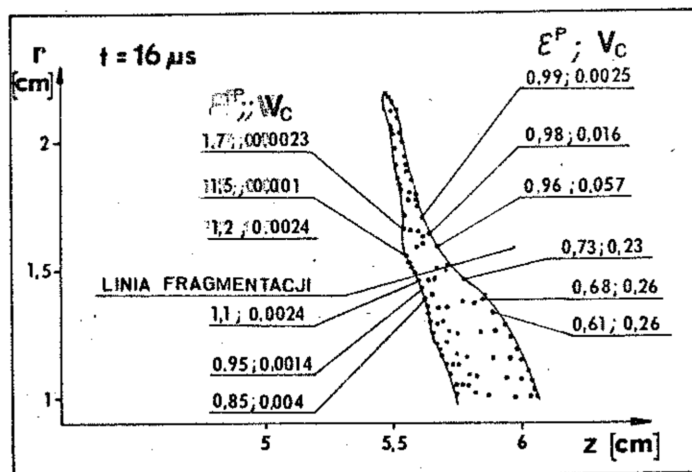
a na rys.21:

$\varepsilon^p > \varepsilon^p_{kr}$; $V_c < (V_c)_{kr}$ - na powierzchni wewnętrznej,

$\varepsilon^p \gtrsim \varepsilon^p_{kr}$; $V_c > (V_c)_{kr}$ - na powierzchni zewnętrznej.

Z analizy tych relacji oraz relacji geometrycznych uwidocznionych na rys.20 i 21 wynika, że jeśli kryteria zniszczenia materiału mają być spełnione z pewnym "zapasem", to pozostaje określony margines swobody odnośnie wyboru linii fragmentacji oraz czasu przeprowadzenia tej operacji. Eksperymenty komputerowe pokazały, że margines ten jest dość szeroki, tzn. nie obserwuje się istotnych zmian parametrów formowanego pocisku jeśli linia fragmentacji będzie poprowadzona przez inne punkty niż to zaznaczono na rys.20 i 21 z dokładnością do ~ 3 punktów. Czas przeprowadzenia operacji rozdzielenia rozwiązań na dwa obszary może być również znacznie opóźniony w stosunku do przyjętego w tym przykładzie, nawet w zakresie do ~ 10 μs.

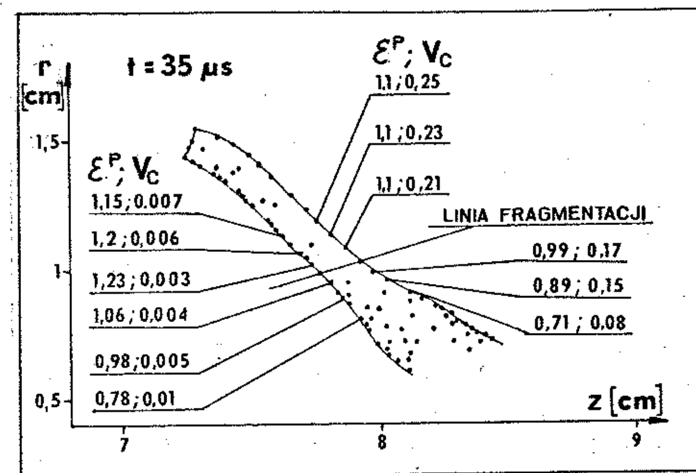
Szczegółowa obserwacja zmian wielkości ε^p i V_c w obszarach fragmentacji wskazuje, że kryteria zniszczenia materiału są spełniane stopniowo dla kolejnych punktów począwszy od podstawy wkładki. Oznacza to, że fizycznie mamy do czynienia z procesem quasiciągłego odrywania się odłamków przy podstawie wkładki. Numeryczne prowadzenie takiego quasiciągłego procesu fragmentacji jest formalnie możliwe, ale technicznie



Rys.20. Rozkłady deformacji plastycznej ε^P oraz objętości szczelin V_c w chwili przeprowadzania pierwszej operacji oddzielenia zniszczonego fragmentu wkładki.

bardzo kłopotliwe. Dlatego też bazując na tym, że czas przeprowadzania operacji rozdzielania rozwiązań może być przyjmowany z dość dużym opóźnieniem, podzielono proces fragmentacji tylko na dwa, wyżej omówione etapy.

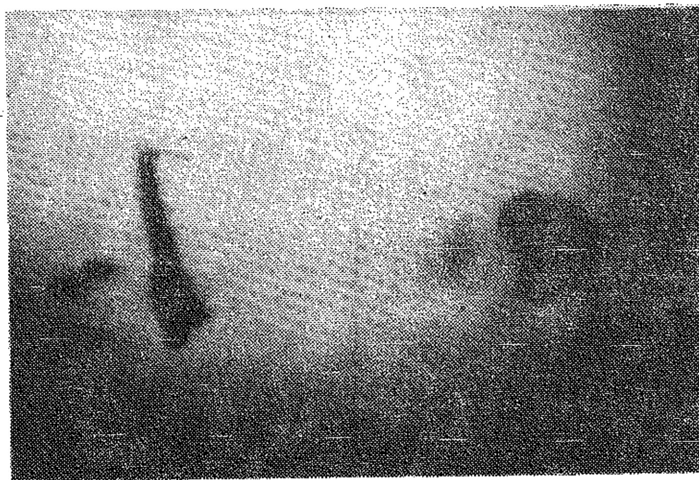
Fragmentacja obszarów przy podstawie wkładki kumulacyjnej jest efektem potwierdzonym eksperymentalnie. Jeśli odległość ładunku kumulacyjnego od przegrody jest niewielka, to można obserwować radialnie rozłożone ślady po uderzeniach tych fragmentów w przegrodę. Niekiedy można również zaobserwować te odłamki na fotografiach wybuchowo kształtowanych pocisków. Na rys.22 zamieszczono szczególnie ciekawą fotografię. Dobór parametrów ładunku spowodował bowiem oderwanie się od wkładki dużego fragmentu, który nie rozproszył się radialnie lecz z nieco mniejszą prędkością podąża za pociskiem.



Rys. 21. Rozkłady deformacji plastycznej ε^P oraz objętości szczelin V_c w chwili przeprowadzania drugiej operacji oddzielenia zniszczonego fragmentu wkładki.

Zgodnie z tym co powiedziano we wstępie do niniejszego rozdziału, rozwiązanie komputerowe pozwala na sporządzenie bardzo wielu różnych czasowo - przestrzennych charakterystyk procesu.
Na rys.23 przedstawiono kilka takich przykładowych charakterystyk. Dotyczą one rozkładów temperatur, średnich gęstości i deformacji plastycznych wzdłuż odpowiednich przekrojów uformowanego ostatecznie pocisku oraz zmian w czasie prędkości czoła ($v_{A'}$) i tylnej części pocisku (v_A).

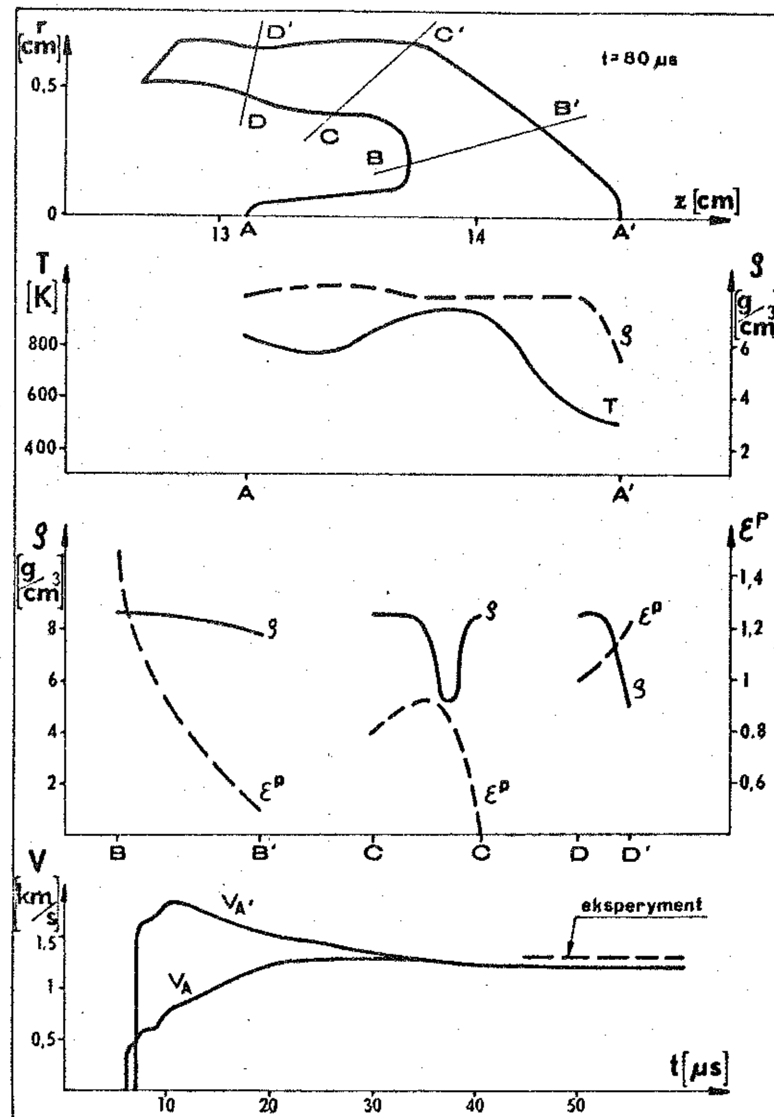
Rozkłady gęstości wzdłuż osi (przekrój A-A'), oraz w zasadniczej, czołowej części pocisku (przekrój B-B') wskazują, że w tych obszarach ośrodek ma strukturę litego metalu z pomijalnie małą objętością szczelin. Wyjątek stanowi tu tylko niewielkie otoczenie punktu A', gdzie bliski jest spełnienia warunek $V_c \approx (V_c)_{kr}$ Stan taki pojawia się dopiero w końcowych



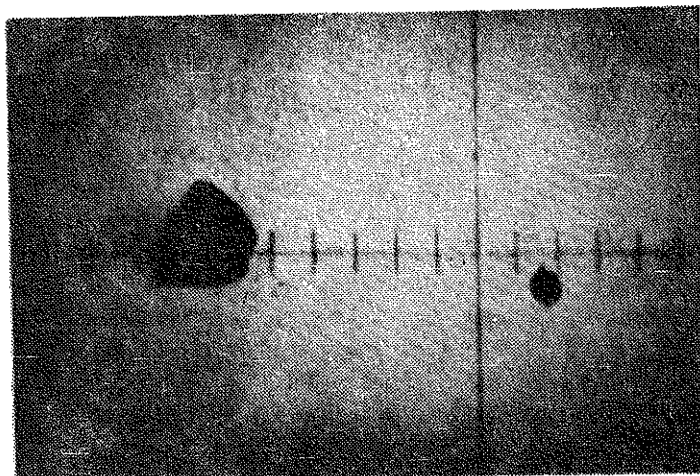
Rys. 22. Fotografia wybuchowo ukształtowanego pocisku wraz z oderwanym od niego fragmentem podstawy wkładki.

fazach procesu wyhamowania prędkości czoła pocisku v_A', tj. w czasach rzędu 25 ÷ 30 μs i jest on wynikiem tego, że w procesie napędzania i deformacji wkładki otoczenie punktu A' osiągnęło prędkości bliskie krytycznym. Gdyby konstrukcja ładunku umożliwiła osiągnięcie większych prędkości $v > (v_A')_{max}$ fragment czoła mógłby oderwać się od zasadniczej części pocisku, gdyż siły wytrzymałościowe byłyby już zbyt małe dla zrównoważenia sił bezwładności. Efekt taki zarejestrowano wielokrotnie na fotografiach wybuchowo kształtowanych pocisków. Przykład takiej fotografii zamieszczono na rys. 24.

Efekt odrywania się czołowych fragmentów pocisków ($V_c > (V_c)_{kr}$ w pewnym otoczeniu czoła pocisku) występował również przy analizach numerycznych różnych wariantów układów kumulacyjnych. Dlatego też kod numeryczny jest przygotowany na przeprowadzenie operacji oderwania i wyeliminowania z dalszych obliczeń takiego fragmentu.



Rys. 23. Rozkłady temperatury, gęstości i deformacji plastycznej w różnych przekrojach wybuchowo ukształtowanego pocisku oraz proces ustalania się prędkości pocisku w czasie.



Rys. 24. Fotografia wybuchowo ukształtowanego pocisku wraz z oderwanym fragmentem z jego czoła.

Ideowo zasady postępowania są w takim przypadku analogiczne jak dla fragmentujących się ramion wkładki.

Rozkład temperatury wzdłuż osi (A-A') przedstawiono dlatego, że na osi występują temperatury najwyższe i jak widać są one rzędu 900 K. Dowodzi to słuszności sformułowanego w pierwszym rozdziale wniosku o nieprzydatności modeli hydrodynamicznych do opisu zjawiska odwrotnej kumulacji. Temperatury maksymalne rzędu ~ 900 K, a tym bardziej temperatury średnie rzędu ~ 400 ÷ 600 K są bowiem znacznie mniejsze od temperatury topnienia miedzi, która wynosi 1356 K. Wyjątek może stanowić jedynie wstępna faza napędzania wkładki,

nazwana fazą hydrodynamiczną, gdyż mimo niskich temperatur jest wtedy spełniona relacja: $\rho u^2 \gg Y$.

Nie mieszczący się również w ramach hydrodynamicznej teorii efekt wyrównywania prędkości "zbitka" i "strumienia" ilustrują od strony ilościowej zmiany w czasie prędkości $v_{A'}$ i v_A. Na wykresie tym naniesiono również ustaloną wartość prędkości pocisku zmierzoną eksperymentalnie. Jak widać rozbieżności wyników teoretycznych i eksperymentalnych w zakresie tego parametru są rzędu 7%. Dokładność tego rzędu jest zupełnie wystarczająca z punktu widzenia aplikacji praktycznych omawianej metody. Z drugiej strony wobec złożoności problemu i umowności szeregu modelowych założeń nie mają już głębszego uzasadnienia próby uzyskania większej dokładności.

Rozkłady gęstości średniej wzdłuż przekrojów C-C' i D-D' sygnalizują ciekawe i dość złożone zjawisko rozwarstwiania się płyt metalowych napędzanych ciśnieniem produktów detonacji. Zjawisko to obserwuje się dla płyt o dostatecznej grubości, które rozdzielają się na dwie lub nawet więcej części wzdłuż płaszczyzn równoległych do ich powierzchni. Efekt ten, znany już dawno od strony eksperymentalnej [2,14] jest w dalszym ciągu przedmiotem badań teoretycznych, w tym również wykorzystujących metody fizyki komputerowej (np. prace [46,113]).

W ramach niniejszej pracy zagadnienie rozwarstwiania się wkładek kumulacyjnych w trakcie ich napędzania było jednym z podproblemów, który musiał zostać rozwiązany w taki sposób, aby mimo efektów zniszczenia materiału w obszarach rozwarstwień, móc kontynuować obliczenia dla dalszych faz zjawiska kumulacji. Rozwiązanie takie umożliwił oczywiście omówiony wcześniej model powstawania i wzrostu objętości szczelin. W modelu takim obszar rozwarstwienia będzie obszarem bardzo silnego, lokalnego wzrostu objętości szczelin (spadku gęstości średniej) z praktycznie zerowymi składowymi tensora naprężeń ($\rho \ll \rho_0$, $\sigma_{ik} \approx 0$).

Jak już wspomniano efekty takie sygnalizują już rozkłady gęstości wzdłuż przekrojów C-C' i D-D' ($\rho < 0.7\rho_0$ jest w przybliżeniu równoważne $V_c > (V_c)_{kr}$), ale dla ich zrozumienia trzeba prześledzić dokładniej czasowo - przestrzenny rozwój tego zjawiska. W tym celu można posłużyć się ilustracjami zamieszczonymi na rys.25.

Na pierwszej ilustracji (t = 8.75 µs) widoczny jest wydłużony obszar zniszczonego materiału usytuowany praktycznie równolegle do powierzchni wkładki. Jest to więc typowy efekt rozwarstwiania się wkładki. W tym miejscu mogą zrodzić się dwa pytania, a mianowicie : dlaczego taki efekt w ogóle powstaje oraz dlaczego powstaje w obszarze zaznaczonym na rys.25 ?

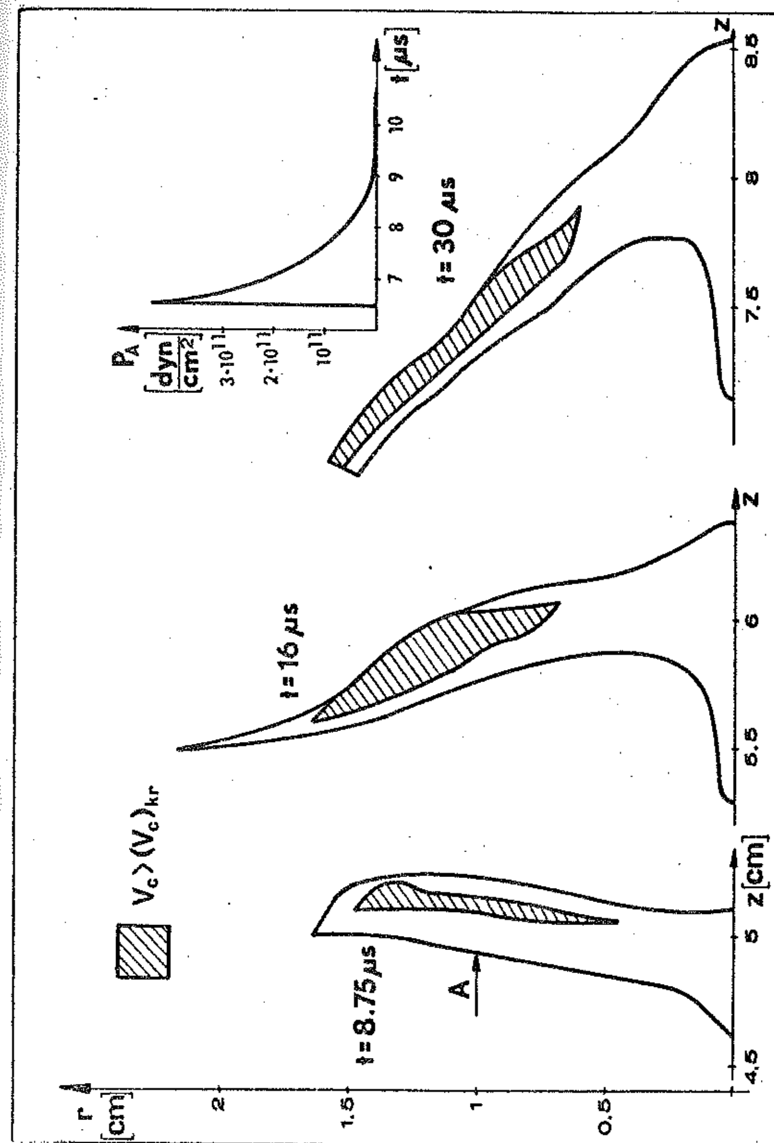
W pracy [14], w oparciu o przybliżenie akustyczne pokazano, że rozwarstwienie występuje wtedy, gdy impuls ciśnienia generowany na kontakcie: produkty detonacji - wkładka i propagujący się we wkładce ma charakterystyczny kształt przestrzenny. Otóż, na odległości równej dwóm grubościom wkładki musi on zmniejszać się o wielkość przekraczającą progową wartość na zniszczenie materiału σ^*. Wówczas w odległości X od powierzchni swobodnej wkładki naprężenia rozciągające na czole fali odciążenia mogą przekroczyć wartość σ^* i rozpocznie się proces rozwarstwiania. Zakładając, że impuls ciśnienia ma postać:

$$p = p_0\left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \tag{4.4}$$

można zgodnie z pracą [14] podać następujące oszacowanie wielkości X:

$$X = \frac{1}{2}\,\frac{c\,\sigma^*}{p_0}\,t_0 \tag{4.5}$$

Naprężenie σ^* można byłoby utożsamiać z wprowadzonym w modelu tworzenia się szczelin naprężeniem progowym σ_0 , ale okazało się z obliczeń, że dynamicznie naprężenie to może być nawet kilkakrotnie przekroczone (szczególnie na początku procesu gdy



Rys.25. Efekt rozwarstwiania się wkładki kumulacyjnej w procesie jej napędzania.

$V_c \ll V_{cr}$). Dlatego też dla oceny wielkości X lepiej przyjąć zgodnie z pracą [46], że dla miedzi $\sigma^* \approx 3\times10^{10}$ dyn/cm². Aby ocenić charakterystyczne dla naszego przykładu wielkości p_o i t_o naniesiono na rys.25, kształt impulsu ciśnienia $p_A = p_A(t)$ zdjętego w punkcie A, który zaznaczono strzałką na pierwszej ilustracji. Przyjmując szacunkowo na podstawie tego wykresu $p_o \approx 3\times10^{11}$ dyn/cm² i $t_o \approx 2.5\times10^{-6}$ s dostajemy z (4.5):

$X \approx 5\times10^{-2}$ cm.

Oszacowanie to dość dobrze zgadza się z wynikami symulacji komputerowej, gdyż jak to widać na rys.25, w dość znacznym otoczeniu punktu A rozwarstwienie zaczyna się na odległości $X \approx 6\times10^{-2}$ cm. Nie można jednak z pomocą wzoru (4.5) wytłumaczyć wszystkich obserwowanych efektów. Ma on bowiem bardzo przybliżony charakter i nie uwzględnia na przykład faktu, że samo przekroczenie naprężenia σ^* nie oznacza jeszcze zniszczenia ośrodka. Do tego potrzebne jest jeszcze odpowiednio długie utrzymanie naprężeń przekraczających wartości progowe, aby objętość szczelin mogła wzrosnąć do poziomu $V_c > (V_c)_{kr}$. Ten efekt oraz złożony obraz falowy w otoczeniu podstawy wkładki są odpowiedzialne za charakterystyczy kształt zniszczonych obszarów w tym rejonie. Analogiczny obraz zniszczeń uzyskano również na bazie symulacji komputerowej w pracy [114] i potwierdzono go eksperymentalnie. Natomiast w centralnych obszarach wkładki rozwarstwienie jest natychmiast li widowane przez efekt pogrubiania sie wkładki (symetria cylindryczna) w wyniku ruchu masy w kierunku osi (U<0).

Na dalszych ilustracjach (t = 16 µs i t = 30 µs) zamieszczonych na rys.25 pokazano ewolucję w czasie kształtów zniszczonego obszaru. Charakterystyczne jest przy tym pojawienie się dalszych zniszczeń w wyniku radialnego rozciągania powierzchniowych warstw wkładki, które nałożyło się na wcześniejsze zniszczenie w obszarze rozwarstwienia. Kształt zniszczonych obszarów pokazanych na tych ilustracjach tłumaczy już w pełni rozkłady gęstości pokazane na rys.23.

Omawiając podstawowe równania problemu zasygnalizowano, że opis efektów lepkich w dynamicznie deformowanych metalach jest w dalszym ciągu sprawą otwartą i to nie tylko dlatego, że stosuje się różne modele teoretyczne, np. Maxwella, Binghama, model dyslokacyjny i inne. Okazuje się bowiem, że nawet w ramach jednego modelu oceny ilościowe efektów lepkich podawane przez różnych autorów mogą się różnić nawet w zakresie kilku rzędów wielkości. Przykładem może tu być najprostszy model Maxwella ze współczynnikiem lepkości η =const. W literaturze można znaleźć przykładowo następujące oszacowania tego współczynnika:

10 P w pracy [43], 2×10^2 P w [115,116], 3×10^3 P w [117] oraz $10^4 \div 10^5$ P w pracach [40, 118, 119].

W tej sytuacji przyjęto również w pierwszym etapie pracy stały współczynnik lepkości, dobierając jego wartości z zakresu $10^2 \div 10^5$ P. Okazało się, że dla dużych $\eta \sim 10^4 \div 10^5$ P, modelowane teoretycznie pociski miały wyraźnie mniejszą długość i większą średnicę niż w eksperymentach. W miarę zmniejszania $\eta \sim 10^2 \div 10^3$ P relacje te poprawiły się, ale równocześnie zaczął się pojawiać efekt oderwania ramion wkładki od jej centralnej części, czego nie obserwowano w eksperymentach.

Szczegółowa analiza tych wyników wskazywała wyraźnie, że lepkość ma istotny wpływ na parametry wybuchowo kształtowanych pocisków, ale założenie η =const jest zbyt dużym uproszczeniem. Dlatego też w dalszych badaniach uwzględniano zależność współczynnika lepkości od temperatury, która teoretycznie powinna być zależnością najsilniejszą. Z powodu braku w literaturze ilościowych ocen dotyczących tej zależności przyjęto wstępnie, że funkcja $F(T)$ jest liniowa (patrz wzór 2.32), a stąd:

$$\eta = \eta_1 = \eta_{01}\left(1 - \frac{T-300}{T_m-300}\right)\left[1 + b_p\left(\frac{\rho_o}{\rho_s}\right)^{1/3} - h\,(T-300)\right] \qquad (4.6)$$

Parametr T_m został określony przy omawianiu modelu Steinberga. Optymalną wartośc współczynnika η_{01} dla miedzi ustalono na

poziomie 10^4 P. Uzyskano przy tym znacznie bliższe w stosunku do eksperymentu wyniki, co dowdziło poprawności sformułowanych wniosków i przyjętego kierunku badań.

Aktualnie najlepsze wyniki osiągnięto wprowadzając w miejsce zależności liniowej (4.6) zależność wykładniczą:

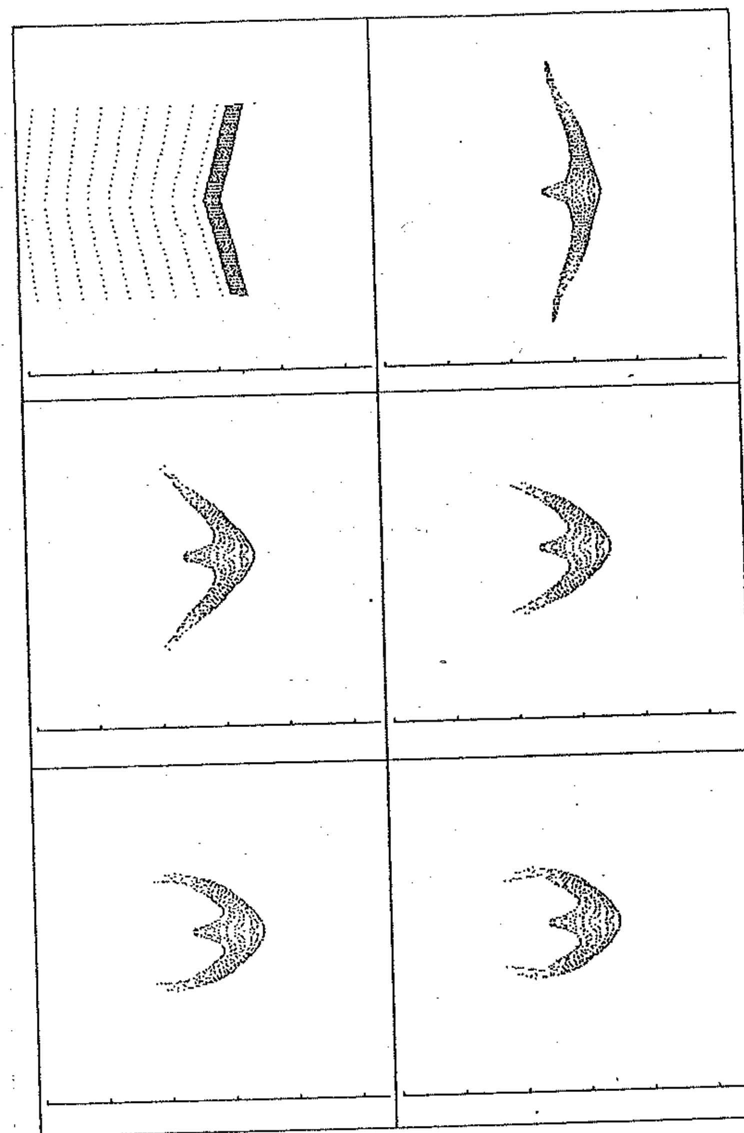
$$\eta = \eta_2 = \eta_{02} \exp\left(\frac{4380}{T}\right) \left[1 + bp\left(\frac{\rho_0}{\rho_s}\right)^{1/3} - h(T - 300)\right] \tag{4.7}$$

Postać funkcji η_2 przyjęto analogicznie jak dla stopionej miedzi [120], a w ramach badań własnych ustalono tylko współczynnik η_{02} =5x10⁻² P. Trzeba jednak powiedzieć, że różnice wyników dla $\eta = \eta_1$ i $\eta = \eta_2$ nie mają już jakościowego charakteru, ale dotyczą raczej szczegółów związanych z kształtami badanych pocisków. Różnice te można ocenić porówując wyniki przedstawione na rys.26 i 27, gdzie w jednakowych skalach przestrzennych i jednakowych odstępach czasu przedstawiono wyniki dla współczynników lepkości określonych wzorami (4.6) i (4.7).

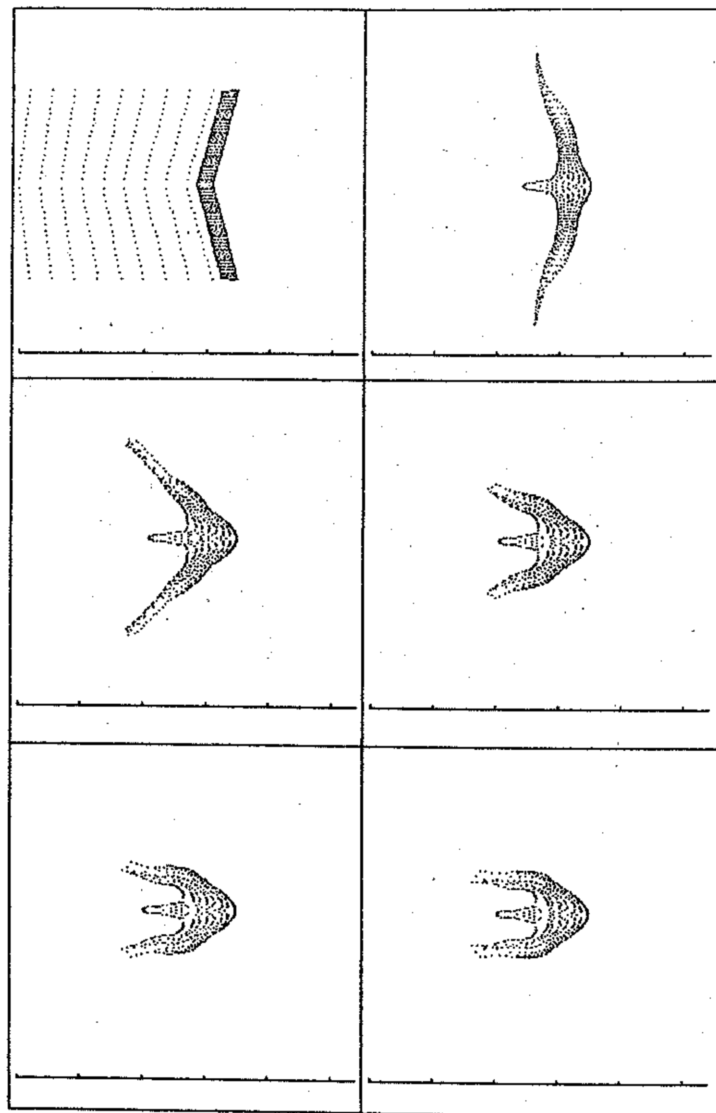
Jednocześnie na rys.28 przedstawiono fotografię wybuchowo ukształtowanego pocisku, który był przedmiotem badań teoretycznych. Dla porównania zamieszczono obok najlepszy aktualnie wynik teoretyczny w tej samej skali przestrzennej (ostatni kadr z rys.27).

Z rys.28 widać, że zgodność wymiarów i kształtów pocisków jest zupełnie wystarczająca z punktu widzenia zastosowań praktycznych omawianej metody.

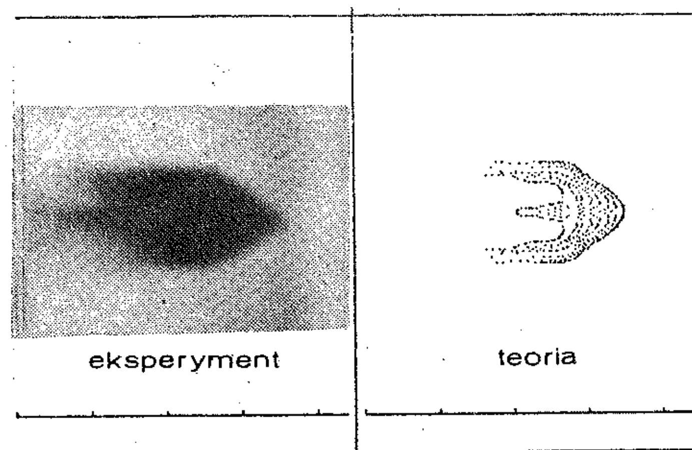
W kontekście tych rozważań można zwrócić jeszcze uwagę na dość nieoczekiwane zastosowanie zjawiska "odwrotnej kumulacji". Otóż, można je wykorzystać, tak jak zrobiono to w niniejszej pracy, do określenia niemierzalnych bezpośrenio w eksperymencie charakterystyk materiałowych, jak np. η, V_{c1}, σ_0. Kod komputerowy w połączeniu z odpowiednimi rejestracjami eksperymentalnymi (fotografiami w świetle widzialnym lub jeszcze lepiej rentgenowskim) staje się praktycznie nowym narzędziem w dziedzinie badań własności materiałów.



Rys.26. Ewolucja kształtów wybuchowo formowanego pocisku dla $\eta = \eta_1$. Odstęp czasowy między kadrami - 16 μs.



Rys. 27. Ewolucja kształtów wybuchowo formowanego pocisku dla $\eta = \eta_2$. Odstęp czasowy między kadrami - 16 μs.



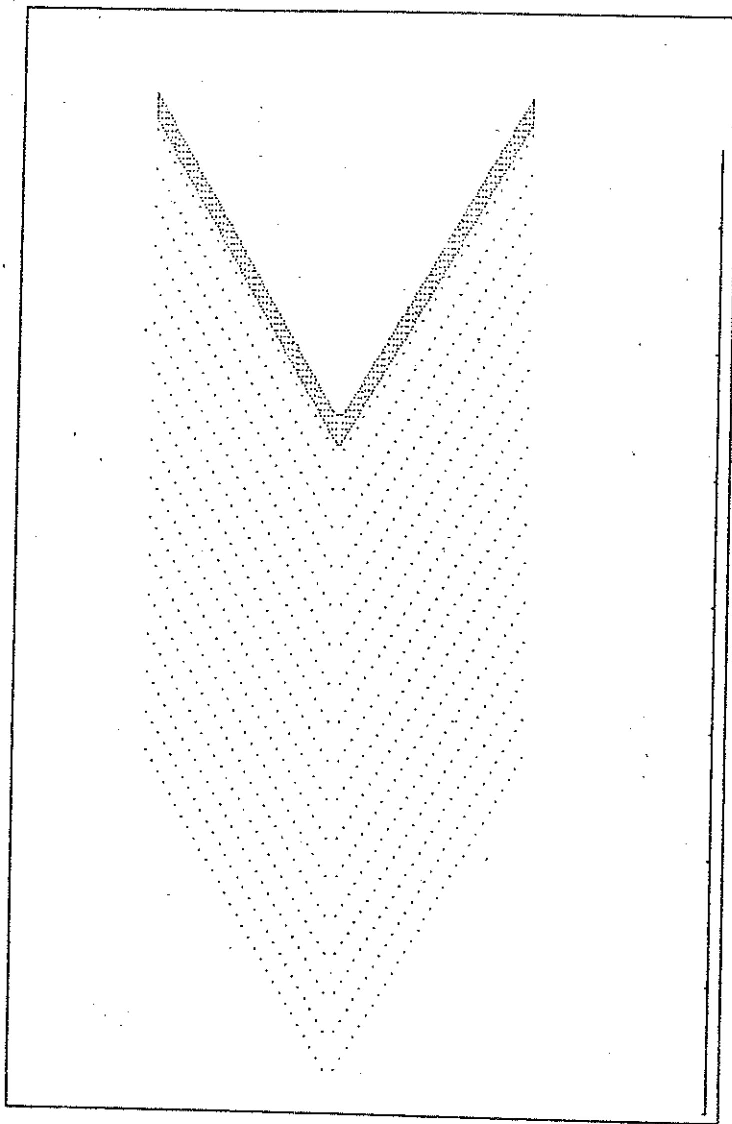
Rys. 28 Porównanie wyników eksperymentalnych i teoretycznych dotyczące ostatecznych kształtów wybuchowo uformowanego pocisku.

4.2. Proces tworzenia się klasycznego strumienia kumulacyjnego.

Bazując na opracowanym modelu matematyczno-fizycznym oraz doświadczeniach natury numerycznej zdobytych przy badaniu zjawiska "odwrotnej kumulacji" można było przystąpić do zweryfikowania przydatności metody w badaniach innych zjawisk. Oczywiście, problematyka pracy wymagała, aby w pierwszej kolejności podjąć próbę zamodelowania procesu tworzenia się klasycznego strumienia kumulacyjnego.

Podobnie jak poprzednio przedmiotem badań był układ o skali laboratoryjnej. Średnica wkładki wynosiła 3 cm, grubość - 0,1 cm, a połówkowy kąt rozwarcia wkładki α przyjęto równym 30°. Również, podobnie jak w poprzednim przykładzie zastosowano do badań termoplastyczny materiał wybuchowy.

Kształt badanego ładunku oraz szczegółowy wygląd pokrywającej go sieci numerycznej pokazano na rys. 29.



Rys.29. Sieć numeryczna pokrywająca materiał wybuchowy i wkładkę kumulacyjną w chwili początkowej.

Z kolei na rys.30 zilustrowano proces detonacji materiału wybuchowego (punkt inicjacji detonacji zaznaczono strzałką). Widoczne są na nim również początki procesu deformacji wkładki i generacji strumienia kumulacyjnego.
Na ostatnim kadrze zamieszczonym na rys.30 pokazano sytuację, w której wpływ ciśnienia produktów detonacji na wkładkę jest już pomijalnie mały i dlatego wyeliminowano je z dalszych obliczeń.

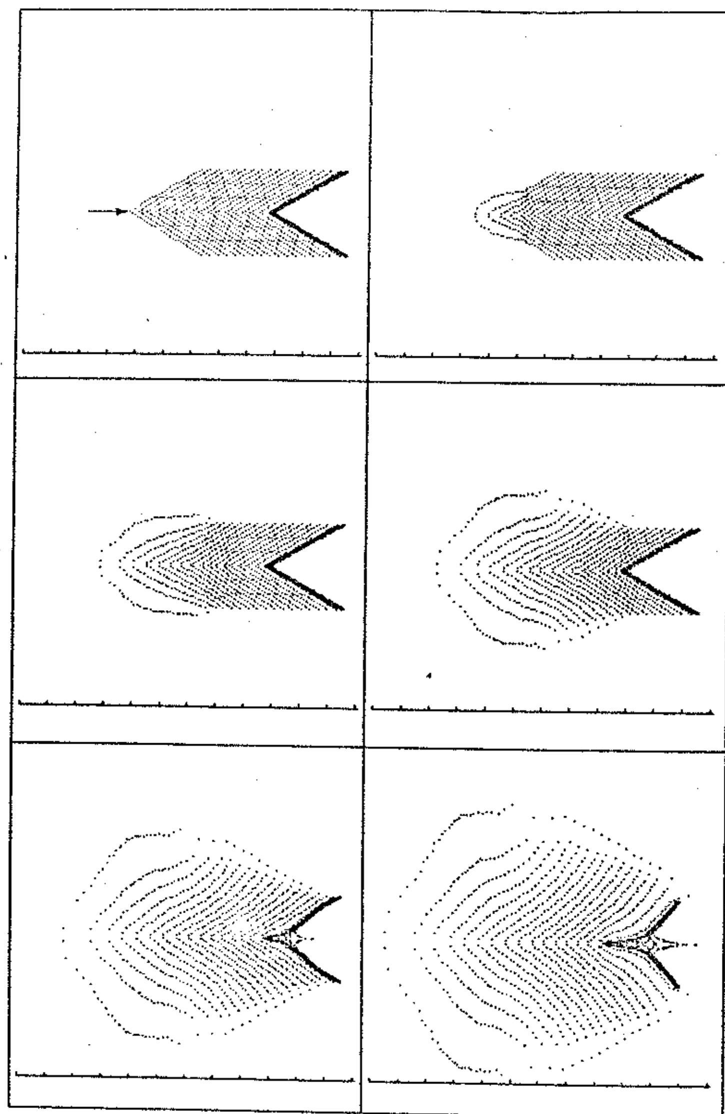
Deformację wkładki oraz proces tworzenia się strumienia kumulacyjnego zilustrowano na rys.31 i 32.
Oczywiście z rysunków tych można określić tylko czasowo - przestrzenne zmiany kształtów badanego układu. Ze względu na to, że skala tych rysunków nie pozwala prześledzić szczegółowo procesu deformacji sieci numerycznej, zamieszczono na rys.33 przykład powiększonej sieci ilustrujący charakter jej deformacji.

Po zapoznaniu się z czasowo-przestrzennymi charakterystykami geometrycznymi zjawiska przedstawionymi na rys.29 ÷ 33 można przejść do omówienia jego podstawowych charakterystyk fizycznych. Najciekawsze charakterystyki dotyczą w tym przypadku strumienia kumulacyjnego i jego parametrów takich, jak: prędkość, temperatura, gęstość i masa. Rozkłady tych parametrów wzdłuż osi "z" zilustrowano na rys.34 w fazie, w której strumień jest już całkowicie ukształtowany i ulega jedynie dalszemu wydłużaniu się skutkiem istnienia gradientu prędkości poosiowej.

Z analizy zamieszczonych na rys.34 wykresów wynikają następujące wnioski:

a/ Osiowa składowa prędkości masowej ϑ ma praktycznie liniowy rozkład wzdłuż osi "z", a prędkość zbitka jest wyrównana i ma typową wartość $\sim$0.5 km/s.

b/ Temperatura czoła strumienia wskazuje, że tworzy je stopiona miedź (T $\geq$ 1400 K). W zasadniczej części strumienia temperatura jest jednak niższa od temperatury topnienia i zgodna z eksperymentalnie określonymi wartościami - 1200 ÷ 1300 K [2].



Rys.30.Deformacje sieci numerycznej pokrywającej materiał wybuchowy i wkładkę.Odstęp czasowy między kadrami-2.6 µs

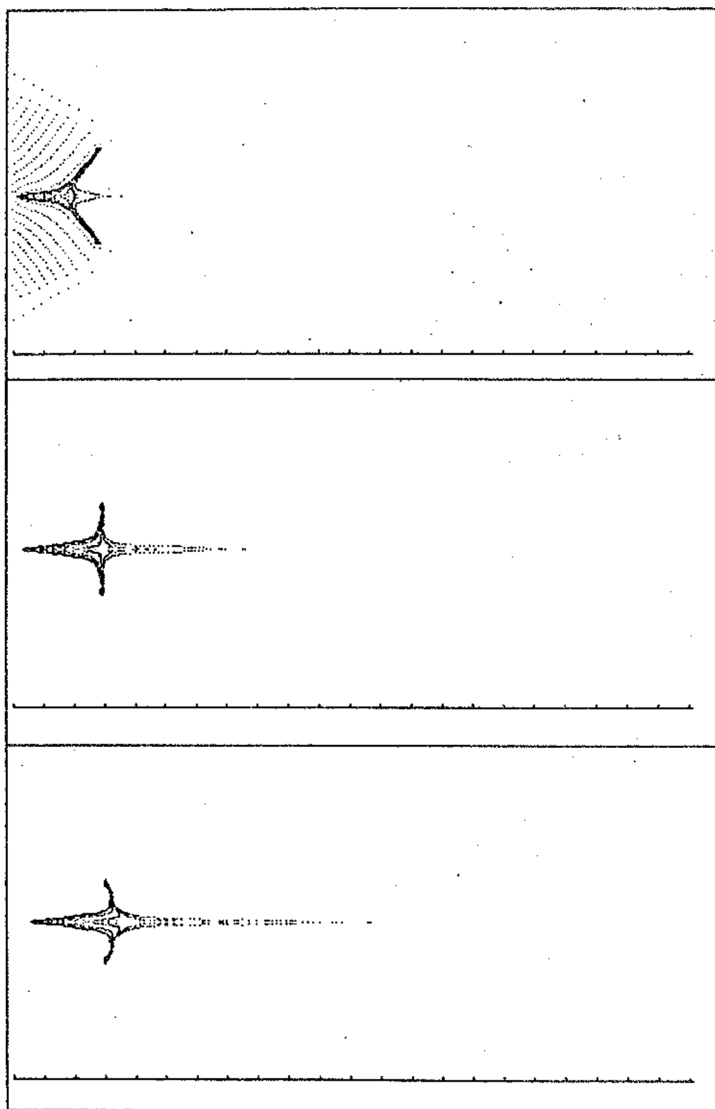
c/ Rozkład gęstości wzdłuż strumienia wskazuje, że utworzony jest on z litego metalu ($V_c \approx 0$), z wyjątkiem ewentualnie niewielkiego obszaru na samym czole strumienia. W fazie , dla której sporządzono te wykresy, nastąpiło już wyraźne oderwanie się strumienia od zbitka. Świadczy o tym silny spadek gęstości średniej w obszarze oddzielającym strumień od zbitka ($V_c > (V_c)_{kr}$). Zjawisko to jest udokumentowane eksperymentalnie [2].

d/ Masa strumienia $M_j = M_j(z)$ jest liczona od czoła strumienia do danego punktu na osi "z". Masa aktywnej części strumienia (z ≈ 10 ÷ 21 cm) stanowi około 25 % całkowitej masy wkładki M_o .

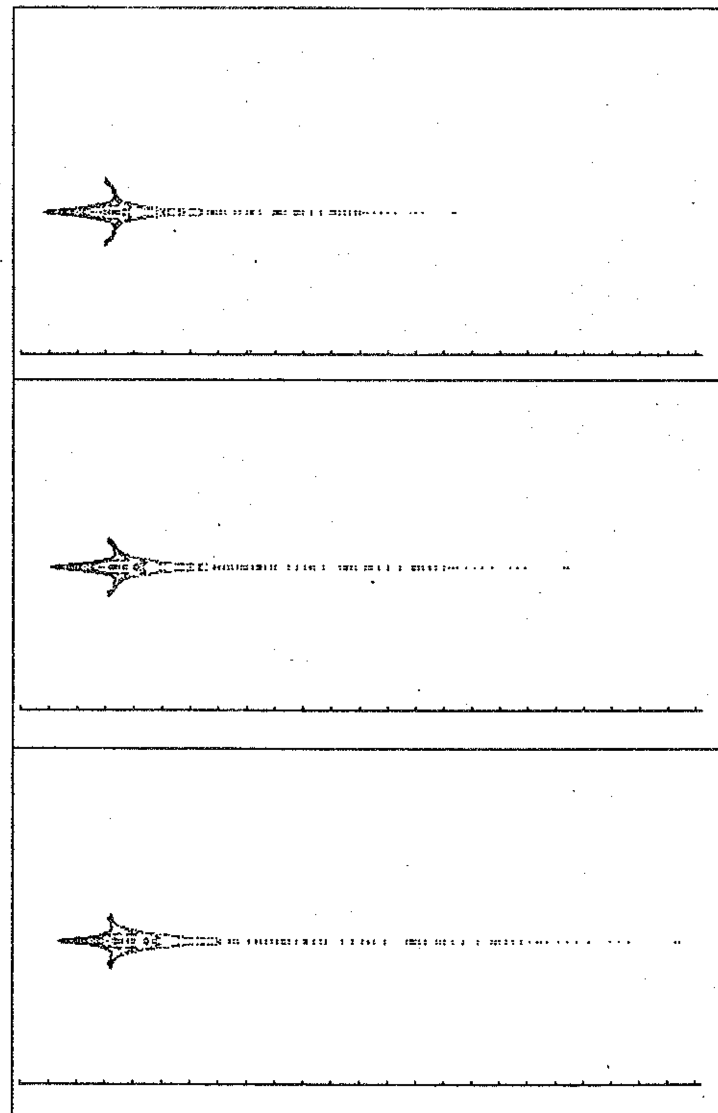
e/ Parametry takie, jak: prędkość zbitka, prędkość czoła strumienia, temperatura średnia strumienia, gęstość i masa aktywnej części strumienia są typowymi wartościami dla klasycznych ładunków kumulacyjnych omówionych w pracy [2]. Świadczy to już o ogólnej poprawności otrzymanego rozwiązania, które później będzie jeszcze dodatkowo skonfrontowane z wynikami własnych eksperymentów.

Na rys.31 i 32 widoczny jest bardzo wyraźnie wzrost w czasie kąta rozwarcia wkładki. Począwszy od trzeciego kadru na rys.31 średnia wartość tego kąta jest już większa od 90 °. To ciekawe zjawisko jest wynikiem bardzo słabego obciążenia podstawy wkładki impulsem ciśnienia generowanym w tym obszarze. Niewielka ilość materiału wybuchowego i boczne fale odciążenia powodują bardzo szybki zanik tego impulsu w wyniku czego podstawa wkładki uzyskuje bardzo małą prędkość, zarówno radialną jak i osiową. Nie bez znaczenia jest również fakt, że początkowy kąt rozwarcia wkładki $\alpha = 30°$, jest kątem dość dużym dla tego typu eksperymentów. W układach praktycznych zjawisko to w takiej skali z reguły nie występuje, gdyż naddatek materiału wybuchowego i osłony mogą znacznie zwiększyć impuls ciśnienia w tym obszarze.

W omawianym przykładzie nie wystąpił tak wyraźnie jak poprzednio efekt rozwarstwiania się wkładki. Jest ona bowiem



Rys.31. Ilustracje procesu tworzenia się klasycznego strumienia kumulacyjnego. Odstęp czasowy między kadrami - 6.6 μs.

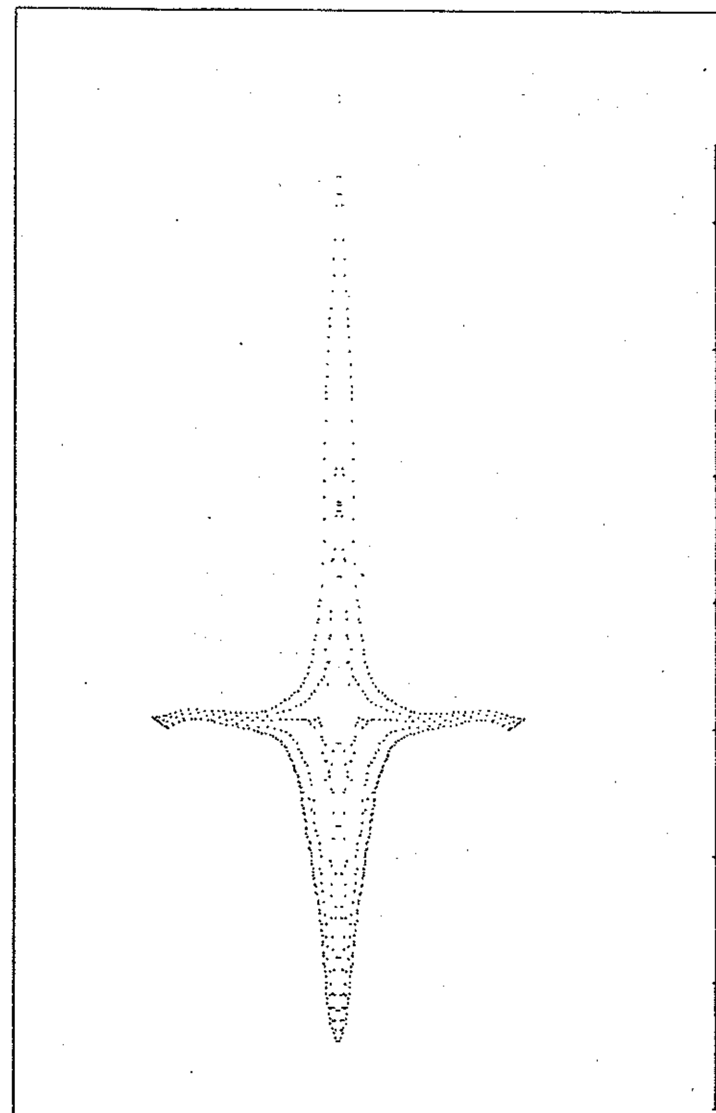


Rys.32. Ilustracje procesu tworzenia się klasycznego strumienia kumulacyjnego, ciąg dalszy rys.31.

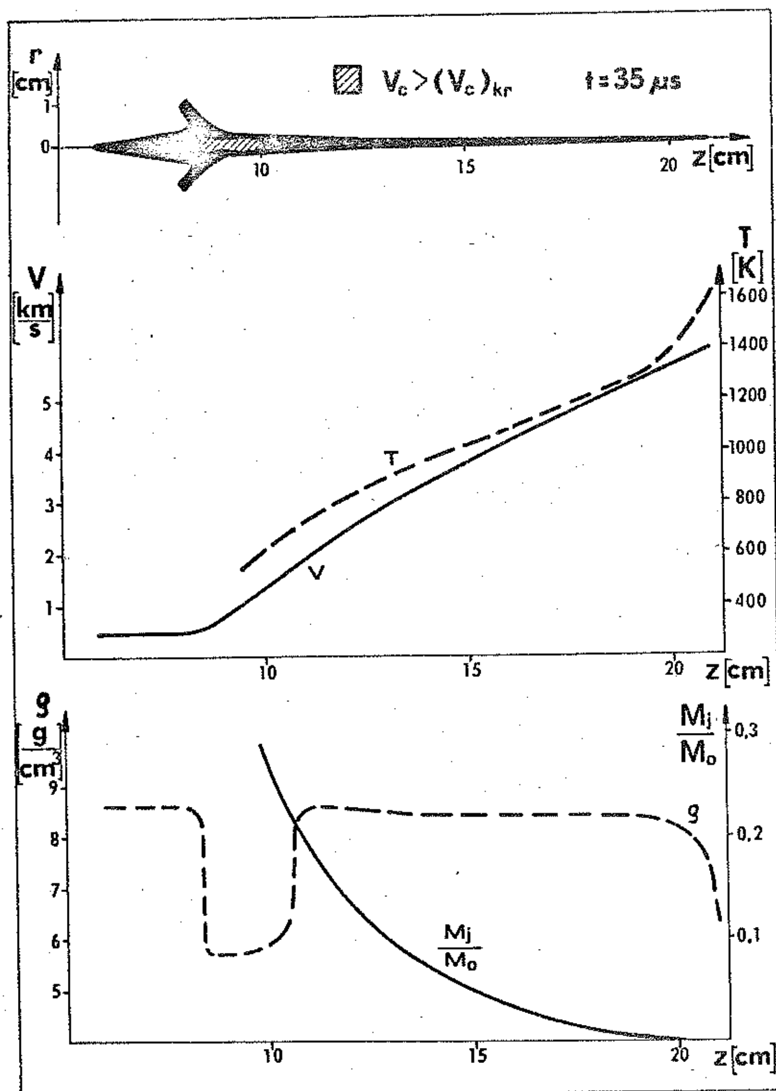
2.5 raza cieńsza, a ponadto prawie dwukrotnie maleje w tym przypadku amplituda odbitej fali detonacyjnej (spadek kąta rozwarcia wkładki α). Już z przybliżonego oszacowania (4.5) wynika, że mamy w tej sytuacji $X \approx L$, gdzie L oznacza grubość wkładki, a rozwarstwienie może wystąpić dla $X<L$. Warunek $X<L$ może być spełniony tylko w pewnym otoczeniu podstawy wkładki, gdyż spada tam również czas trwania impulsu t_o . Z rozwiązania komputerowego wynika, że istotnie, w otoczeniu podstawy wkładki ($r \sim 1.2 \div 1.5$ cm) nastąpiło przekroczenie granicznego naprężenia σ^* i rozpoczął się proces zniszczenia materiału. Jednakże niewielka grubość wkładki powoduje dodatkowo skrócenie czasu, dla którego zachodzi $|p| > \sigma^*$ i w tym konkretnym przykładzie czas ten był zbyt krótki, aby spełnił się warunek zniszczenia $V_c > (V_c)_{kr}$. Maksymalna wartość objętości szczelin V_c nie przekroczyła w żadnym punkcie wkładki wartości około $\frac{1}{3}(V_c)_{kr}$. Można więc rozważania te podsumować stwierdzeniem, że w omawianym przykładzie nie nastąpiło rozwarstwienie się wkładki, ale jedynie pewne osłabienie materiału w otoczeniu jej podstawy.

Bazując na rozważanym przykładzie symulacji komputerowej procesu tworzenia się strumienia kumulacyjnego można dokonać ciekawej i bardzo konkretnej weryfikacji wyników otrzymywanych w oparciu o przedstawioną w rozdziale I teorię hydrodynamiczną.

Oczywiście, podstawowym warunkiem umożliwiającym jej zastosowanie, jest znajomość parametrów napędzonej wkładki, tzn. rozkładów prędkości masowej i kąta jaki tworzy ona z osią symetrii. W naszym przypadku informacje te najprościej uzyskać w oparciu o rozwiązania komputerowe w momencie, w którym zakończył się już proces napędzania wkładki. W takim właśnie momencie (t=13 μs) na rys.35 przedstawiono kształt wkładki wraz z naniesionym rozkładem prędkości masowej $\vec{W}$ (w wybranych punktach wzdłuż linii 1). W oparciu o te informacje można określić średni kąt α jaki wkładka tworzy z osią oraz przybliżony rozkład prędkości $W(z)$ wzdłuż linii 1.



Rys.33. Sieć numeryczna pokrywająca wkładkę kumulacyjną w chwili t=20 μs.



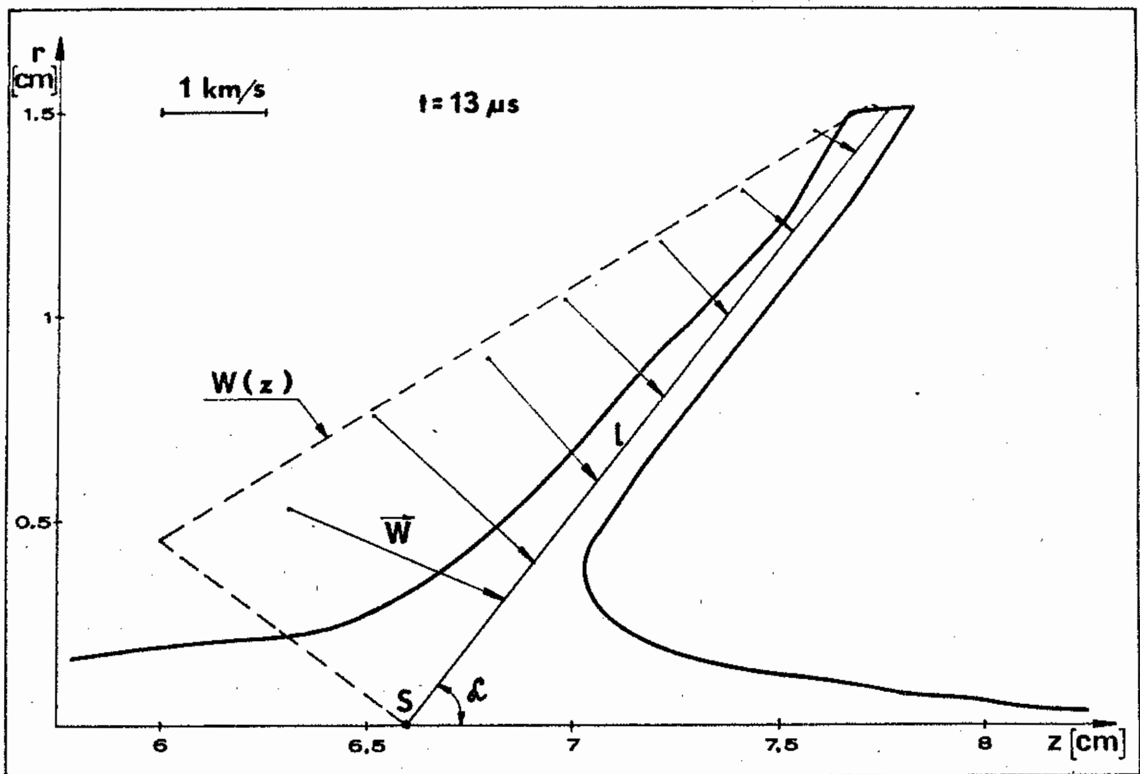
Rys. 34. Rozkład prędkości v , temperatury T, gęstości ϱ i masy M_j strumienia kumulacyjnego wzdłuż osi "z".

Przyjęto zatem, zgodnie z oznaczeniami występującymi we wzorze (1.16): W_o =3 km/s, m =0.86 oraz α =55°.

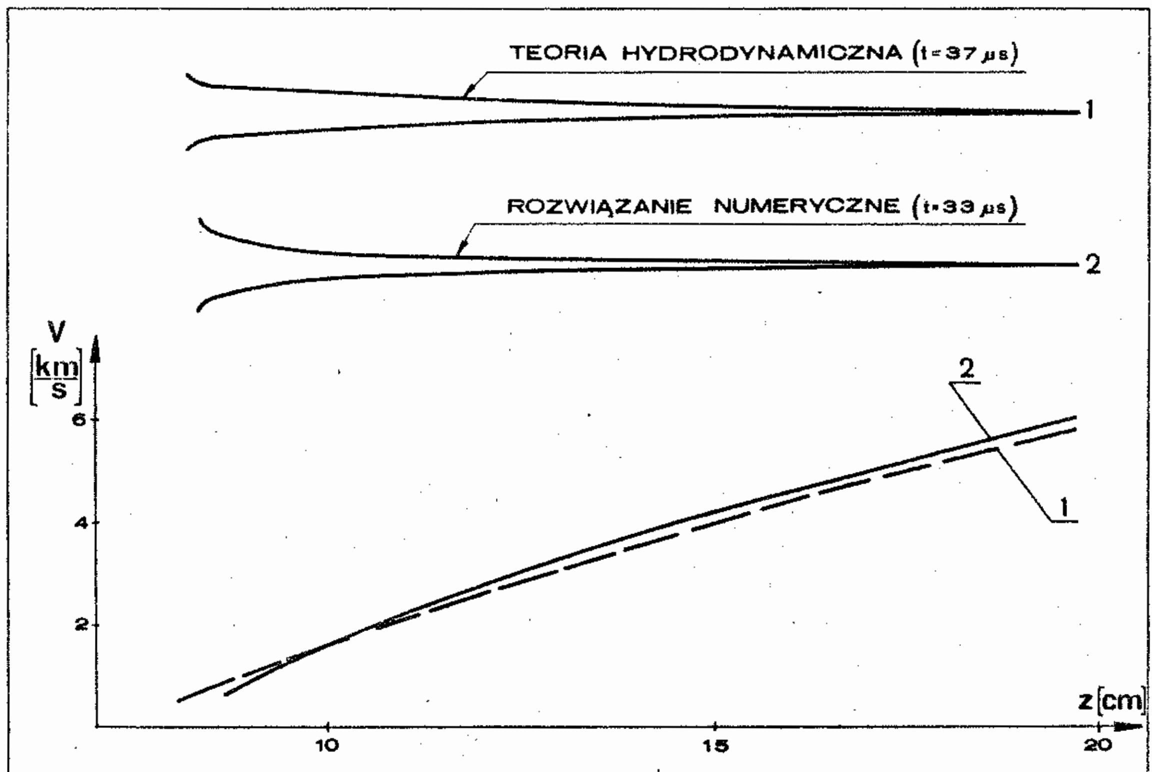
Dane te wystarczają do zbudowania dla t >13 µs rozwiązania w oparciu o teorię hydrodynamiczną, które można będzie skonfrontować z rozwiązaniem numerycznym. Wyniki obu rozwiązań przedstawiono na rys. 36. Widzimy, że zarówno kształty strumieni jak i rozkłady prędkości masowej pozostają ze sobą w bardzo dobrej zgodności.

Oznacza to, że w badaniach procesów tworzenia się strumieni kumulacyjnych podstawowe znaczenie ma znajomość parametrów napędzonej wkładki kumulacyjnej. Jeśli bowiem nie dysponujemy możliwością otrzymania pełnych rozwiązań problemu to możemy ograniczyć się tylko do jego fazy wstępnej, w trakcie której odbywa się napędzanie wkładki. Dalsze rozwiązanie można już konstruować w oparciu o teorię hydrodynamiczną. Podejście takie zastosowano w pracy [26], gdzie do określenia stanu napędzonej wkładki wykorzystano kod typu Lagrange'a, korzystając z faktu, że w fazie napędzania wkładki jej deformacje są stosunkowo niewielkie.

Należy jednak podkreślić, że uzyskanie tak dobrej zgodności wyników (rys. 36) było możliwe dlatego, że badany przykład w czasach 13 µs≤ t ≤37 µs spełnia warunki stosowalności przybliżenia hydrodynamicznego (obszar 1 na rys. 6). Ze wzoru (1.13) wynika bowiem, że proces jest cały czas poddźwiękowy - M ≲ 0.5, a efekty wytrzymałościowe określone warunkiem (1.40) zaczną być istotne dopiero dla elementów wkładki, które w chwili t=13 µs miały promień większy od około 1 cm. Ponieważ elementy te zaczną tworzyć strumień dla t >37 µs, to stąd wynika właśnie czas obowiązywania przybliżenia hydrodynamicznego - t<37 µs. Wykresy zamieszczone na rys. 36 dotyczą zatem maksymalnych czasów, dla których przybliżenie to można stosować. Rozwiązanie numeryczne przedstawiono w chwili wcześniejszej o 4 µs, tak aby czoła obu strumieni miały to samo położenie na osi z. Przesunięcie to wynika z faktu, że rozwiązanie hydrodynamiczne rozpoczyna się w



Rys.35.Rzeczywisty $\overline{W}$ oraz przybliżony W(z) rozkład prędkości masowej wzdłuż ramienia wkładki kumulacyjnej.



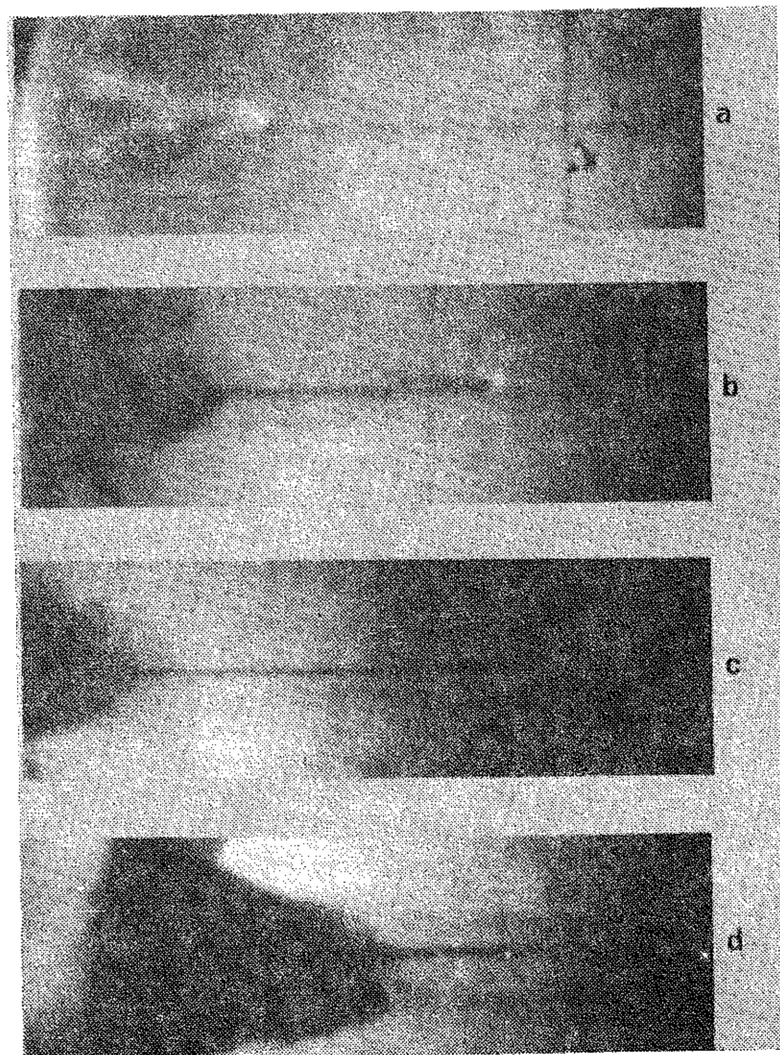
Rys.36.Porównanie kształtów i rozkładów prędkości masowej strumieni kumulacyjnych.

momencie gdy w rozwiązaniu numerycznym czoło strumienia (rys.35) jest już ukształtowane i odległe od punktu S o ponad 2 cm. Jest to wynikiem równoczesności procesów napędzania wkładki i tworzenia się czoła strumienia. Nieuwzględnienie tego faktu w przybliżeniu hydrodynamicznym nie prowadzi do dużych błędów, a wynika to stąd, że efekty te dotyczą pomijalnie małych mas tworzących czoło strumienia.

Porównanie otrzymanych rezultatów z dostępnymi informacjami literaturowymi oraz teorią hydrodynamiczną daje już określoną podstawę do stwierdzenia iż są one poprawne zarówno od strony jakościowej jak i ilościowej. Tym niemniej, w celu uzyskania bezpośredniego dowodu tej poprawności wykonano odpowiednią serię eksperymentów.

W ich wyniku otrzymano serię fotografii strumienia w wybranych chwilach czasu. Kilka tych fotografii zamieszczono na rys.37. Na rys.37 a/ widoczne jest jedynie spalające się w atmosferze czoło strumienia. Fotografię tę można wykorzystać w charakterze bazy do wyznaczania prędkości czoła strumienia. Na następnej fotografii - 37 b/ widoczny jest już sam strumień kumulacyjny oraz jego silnie świecące czoło. W oparciu o te dwie fotografie wyznaczono prędkość czoła strumienia, która podobnie jak w rozwiązaniu numerycznym, wynosi około 6 km/s. Na bazie fotografii 37 b/ można również w przybliżeniu ocenić średnicę strumienia kumulacyjnego w określonej odległości od jego czoła. Rozbieżności między teorią a eksperymentem w tym zakresie są mniejsze niż wynosi błąd odczytu średnicy strumienia na zamieszczonej fotografii. Fotografia 37 c/ pokazuje fazę silnie wydłużonego strumienia i początki jego fragmentacji, a 37 d/ fazę zaawansowanej fragmentacji. Do problemu tego powrócimy jeszcze w tym rozdziale.

Prace eksperymentalne potwierdziły więc bezpośrednio (w zakresie mierzonych parametrów) poprawność uzyskanych rozwiązań i tym stwierdzeniem można już zakończyć omawianie wyników uzyskanych dla modelowego układu służącego do wytwarzania klasycznych strumieni kumulacyjnych.



Rys.37. Fotografie strumienia kumulacyjnego wytworzonego w badanym układzie w kolejnych chwilach czasu:
a/ -17.5 μs; b/ -30.5 μs;
c/ -48.5 μs; d/ -66.5 μs.

Pozytywne wyniki testów i weryfikacji eksperymentalnych dla dotychczas omówionych układów kumulacyjnych stały się bodźcem do podjęcia prób zamodelowania układów produkowanych w skali przemysłowej. Wbrew pozorom przejście od układów o charakterze "laboratoryjnym" do układów "przemysłowych" nie ma tylko formalnego charakteru zmiany wymiarów tych układów. W układach tych należy się bowiem liczyć z koniecznością zamodelowania szeregu dodatkowych efektów, które nie występowały w omówionym układzie eksperymentalnym. Scharakteryzujmy krótko najważniejsze z tych efektów.

1. W dotychczasowych badaniach przyjmowano, że detonacja była inicjowana na osi symetrii układu, a co za tym idzie front fali detonacyjnej miał kształt sferyczny. Tymczasem w praktyce często wykorzystuje się odpowiednie przesłony, za pomocą których można sterować propagacją frontów fal detonacyjnych tak, aby materiał wybuchowy bezpośrednio oddziaływujący z wkładką był inicjowany na pewnym promieniu wokół osi. W modelu teoretycznym fronty tak inicjowanych fal detonacyjnych będą więc miały kształt toroidalny, a nie sferyczny.
2. Materiał wybuchowy jest z reguły umieszczany w odpowiednich osłonach, które są jego mechanicznym zabezpieczeniem. Jednakże osłony te oddziaływując z falami detonacyjnymi zmieniają czasowo przestrzenny kształt impulsu ciśnienia obciążającego wkładkę i muszą być uwzględniane w obliczeniach.
3. Układy "przemysłowe" charakteryzuje bardzo duży stosunek średnicy wkładki do jej grubości, który może osiągać nawet wartosci rzędu $\sim 10^2$. Stwarza to poważne problemy natury technicznej zwiazane z budową odpowiedniej dla takich przypadków sieci numerycznej. Ponadto często stosuje się w praktyce wkładki o zmiennej grubości, co dodatkowo komplikuje te problemy.
4. Omówione w punkcie 1 nieosiowe inicjowanie detonacji ma na celu zwiększenie impulsu ciśnienia działającego na wkładkę. Dotyczy to głównie wierzchołkowych części wkładki, z których powstaje czoło strumienia. W związku z tym należy się liczyć z możliwością pojawienia się przepływów naddźwiękowych w fazie tworzenia się czoła strumienia. Jak wiadomo z rozważań przeprowadzonych w rozdziale I, przepływom takim powinna towarzyszyć fragmentacja strumieni. Kod komputerowy musi więc być przygotowany na eliminowanie z obliczeń takich fragmentów, które przestały oddziaływać fizycznie z pozostałą częścią strumienia.

Efekty omówione w punktach 1,3 i 4 dają się zamodelować stosunkowo prosto, gdyż wymagają jedynie odpowiedniej adaptacji omówionych wcześniej elementów metody numerycznej. Natomiast modelowanie wpływu osłon na przebieg zjawiska kumulacji jest problemem nowym i dlatego trzeba go omówić nieco dokładniej.

W ścisłym sformułowaniu należałoby modelować dynamikę ruchu osłon analogicznie jak zrobiono to dla wkładki kumulacyjnej. Skomplikowałoby to jednak znacznie kod numeryczny i wymagałoby dalszego zwiększania czasów obliczeń oraz obszarów zajmowanej pamięci. Problemów tych można uniknąć modelując ruch osłony w sposób przybliżony, tym bardziej, że można ją wkrótce po napędzeniu wkładki wyeliminować z dalszych obliczeń, gdy jej wpływ na modyfikację impulsu ciśnienia staje się pomijalny.

W przykładzie, który będzie zilustrowany na rys.38,39 i 40 osłonę zamodelowano ciągiem mas skupionych, których ruch opisano następującym układem równań:

$$\frac{du_L}{dt} = \frac{2\pi R_L H_L}{M_L^0}\, p_L \cos\varphi_L \qquad (4.8.)$$

$$\frac{dv_L}{dt} = -\frac{2\pi R_L H_L}{M_L^0}\, p_L \sin\varphi_L \;; \qquad 1 \leq L \leq N \qquad (4.9)$$

gdzie: N - ilośc elementów na jakie podzielono osłonę,

M_L^0 - masa L-tego elementu (stała),

u_L, v_L - składowe prędkości elementu odpowiednio wzdłuż osi r i z,

R_L, H_L - aktualny promień i długość elementu,

φ_L - kąt jaki tworzy element z osią z,

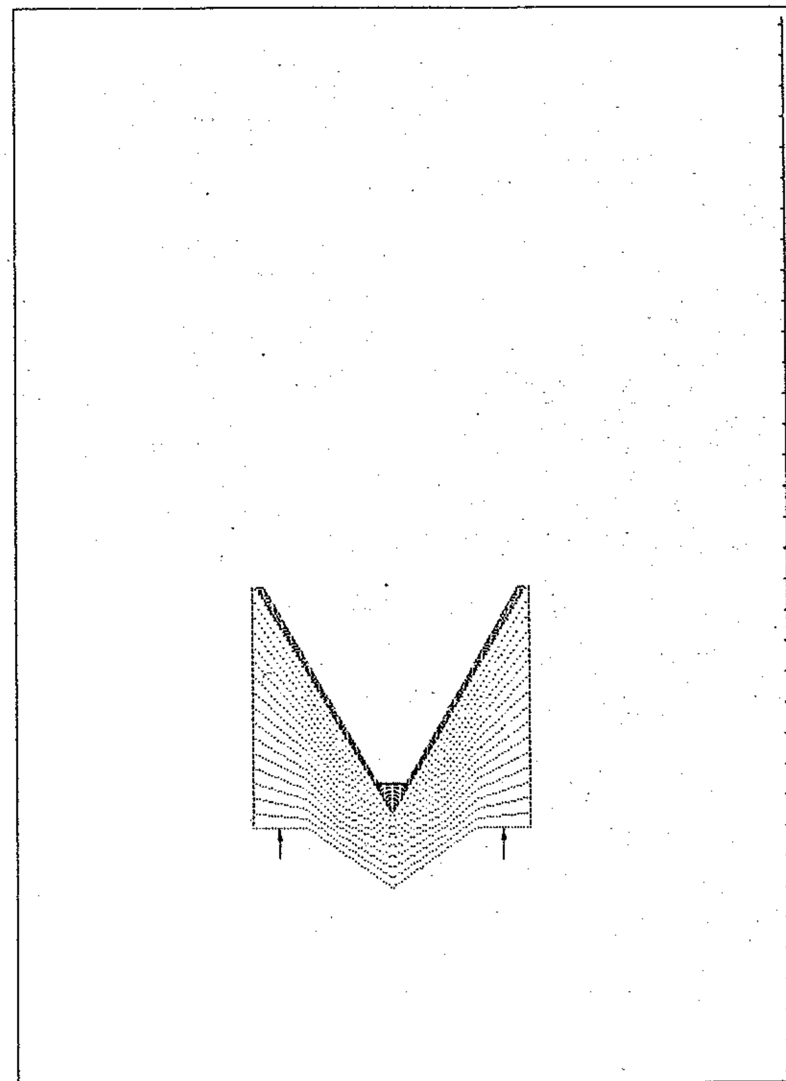
p_L - ciśnienie produktów detonacji na L-ty element.

Warunek brzegowy na kontakcie produkty detonacji - osłona modeluje się analogicznie jak warunek na powierzchni kontaktu produkty detonacji - wkładka kumulacyjna. Każdy punkt produktów detonacji oddziaływujący z osłoną znajduje najbliższe sobie masy skupione reprezentujące tę osłonę. W oparciu o ich prędkości można zamodelować warunek swobodnego poślizgu tak jak omówiono to w poprzednim rozdziale. Natomiast dla każdego elementu (masy skupionej) reprezentującego osłonę, w oparciu o aktualne ciśnienia najbliższych mu punktów reprezentujących produkty detonacji, wylicza się średnie ciśnienie p_L wymuszające ruch elementów - wzory (4.8) ÷ (4.9). Aby uniknąć przypadkowych fluktuacji prędkości elementów wskazane jest wprowadzenie pewnej korekty uśredniającej i wygładzającej rozkłady prędkości elementów sąsiednich. Może ona mieć przykładowo następującą postać:

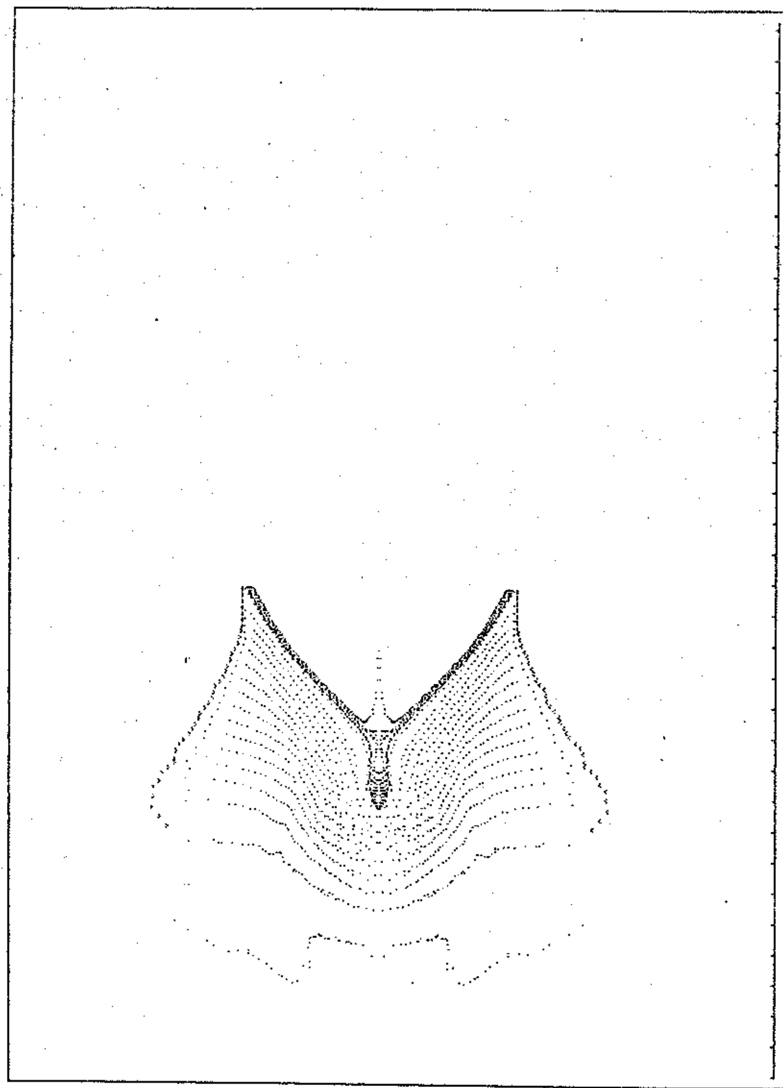
$$u_L^{n+1} = u_L^n + \lambda\left(\frac{u_{L-1}^n + u_{L+1}^n}{2} - u_L^n\right) + \Delta t\left[\frac{2\pi R_L^n H_L^n}{M_L^o} p_L^n \cos\varphi_L^n\right] \quad (4.10)$$

Współczynnik liczbowy λ dobiera się eksperymentalnie (typowo $\lambda \approx 0.01 \div 0.03$).

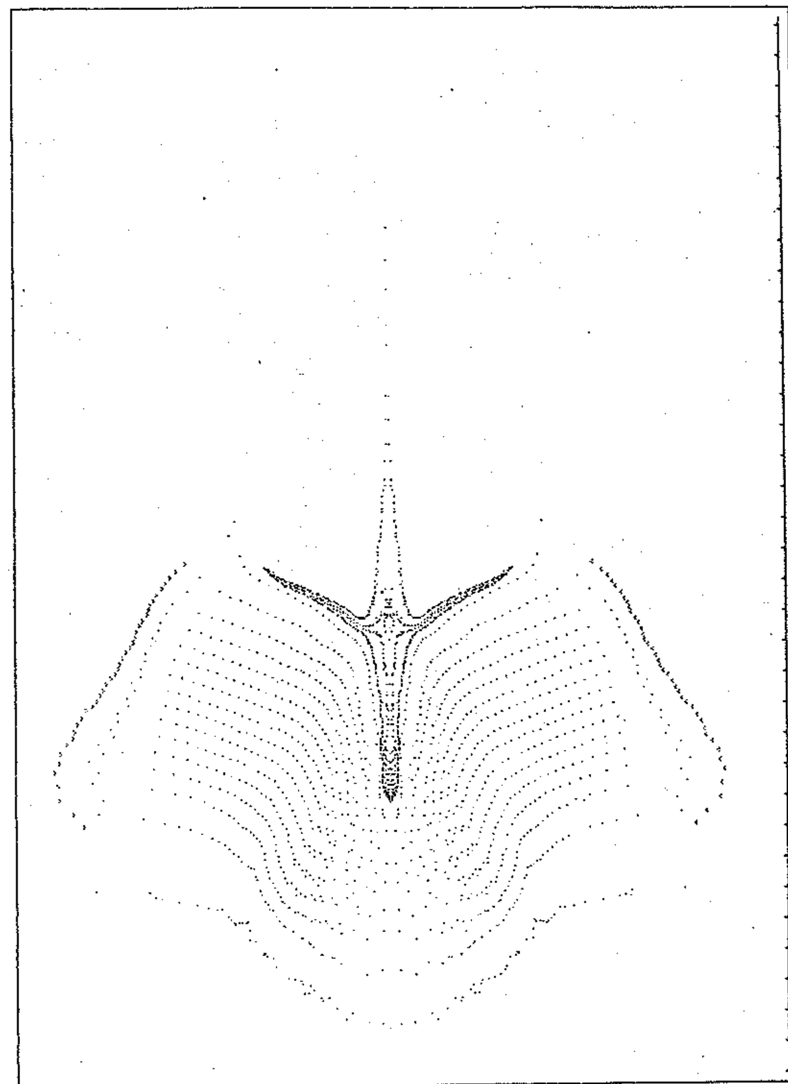
Na rys.38,39 i 40 pokazano przykład rozwiązania numerycznego dla klasycznego ładunku kumulacyjnego, w którym występują omówione wyżej elementy charakterystyczne dla ładunków stosowanych w praktyce. Promień, na którym inicjowana jest detonacja zaznaczono strzałkami na rys.38. Elementy osłony ilustrują znaczniki złożone z układów trzech punktów. Na rys.40 przedstawiono sytuację, w której można już wyeliminować z dalszych obliczeń produkty detonacji wraz z elementami osłony. Nie zamieszczano już ilustracji rozwiązań dla późniejszych faz zjawiska, bo różnią się one od układu modelowego tylko skalą czasowo - przestrzenną.



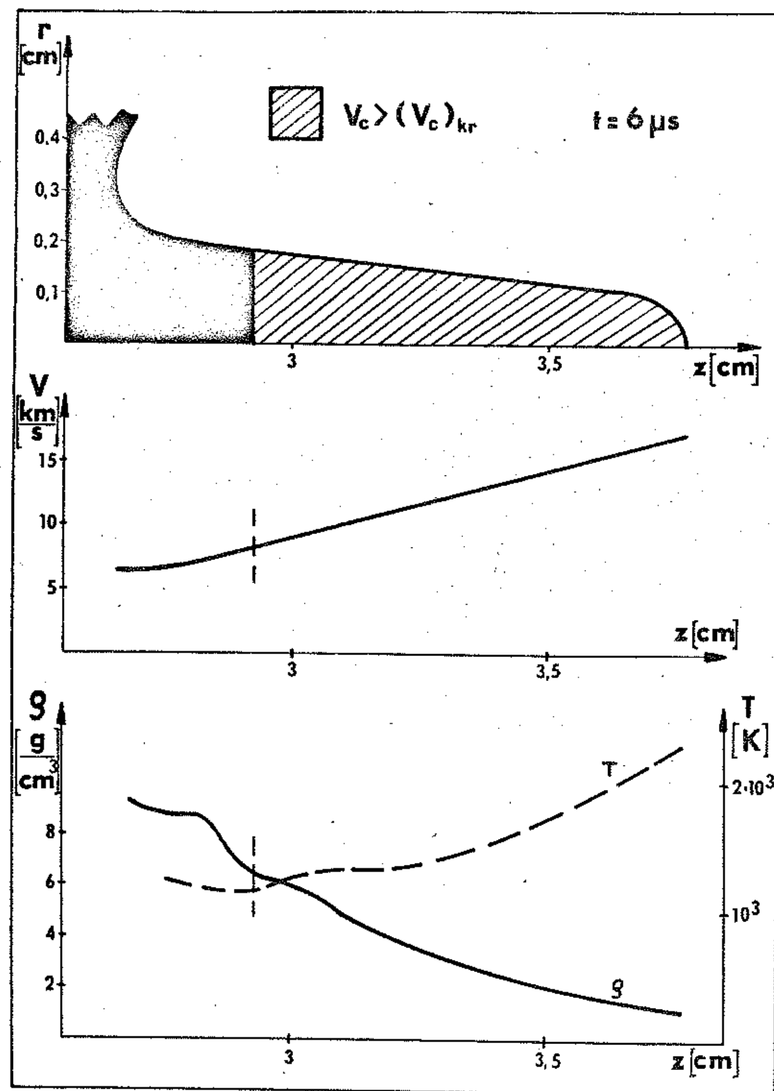
Rys.38, 39, 40. Deformacje sieci numerycznej pokrywającej materiał wybuchowy, wkładkę kumulacyjną i osłonę, t=0.



Rys.39. t=8 μs.



Rys.40. t=16 μs.



Rys.41. Rozkłady prędkości masowej ϑ , średniej gęstości ϱ i temperatury T wzdłuż osi symetrii tworzonego w przepływie naddźwiękowym czoła strumienia.

Z punktu widzenia fizyki zachodzących procesów ciekawsza jest faza początkowa, w której tworzy się czoło strumienia. W fazie tej mamy bowiem do czynienia z omówionym w rozdziale I przepływem naddźwiękowym (skutkiem silnego obciążenia wierzchołka wkładki przy nieosiowej inicjacji detonacji). Maksymalną liczbę Macha w omawianym przykładzie można oszacować na około 1.7. Na rys.41 przedstawiono kształt czoła strumienia oraz rozkłady wzdłuż osi symetrii: prędkości masowej ϑ , średniej gęstości ϱ i temperatury T . Widać, że czoło strumienia tworzy ośrodek, który można traktować tak jakby składał się z praktycznie niezależnych odłamków - $V_c > (V_c)_{kr}$. Ze zmian gęstości średniej wynika, że proces fragmentacji pogłębia się w miarę zbliżania się do granicy czoła strumienia.

Zgodnie z tym co powiedziano w rozdziale I prędkość $\vartheta \approx 2c \approx 8$ km/s (dla miedzi) powinna oddzielać obszar przepływu naddźwiękowego od poddźwiękowego, a więc strumienia rozfragmentowanego od litego. Jak widać z rys.41 oba warunki: $V_c \approx (V_c)_{kr}$ i $\vartheta \approx 2c$ wskazują praktycznie na ten sam punkt strumienia. Świadczy to zarówno o poprawności przeprowadzonych w rozdziale I ocen jak i dobrej ocenie krytycznej objętości szczelin.

Kończąc rozważania dotyczące klasycznych ładunków kumulacyjnych należy zwrócić jeszcze uwagę na proces przemieszczania się i wydłużania strumienia pod wpływem gradientu prędkości poosiowej. Procesowi temu towarzyszą bowiem narastające niestabilności przewężeniowe, które po określonym czasie prowadzą do rozpadu strumienia na szereg podążających za sobą niezależnych elementów. Początek zjawiska można zaobserwować na fotografii 37c/, a na fotografii 37d/ oddzielne elementy są już widoczne bardzo wyraźnie.

Niestety proces ten nie może być należycie zamodelowany w oparciu o tworzącą strumień sieć punktów obliczeniowych, gdyż w fazie fragmentacji nie jest już ona wystarczająco gęsta. Aby móc śledzić rodzące się niestabilności trzeba byłoby zagęścić ją przynajmniej o rząd wielkości (długość elementów, na które

rozpada się strumień jest rzędu 3 do 5 jego średnic). Badanie tego zjawiska mogłoby być realne technicznie gdyby po zakończeniu procesu tworzenia się strumienia pokryć go nową, interpolowaną siecią punktów obliczeniowych, kosztem wyeliminowanego z dalszych obliczeń zbitka.

Podjęcie w przyszłości tego typu badań wydaje się nieuniknione, gdyż:

1. Prace teoretyczne dotyczące tego problemu są bardzo nieliczne. Rezultaty wynikające z teorii małych zaburzeń podano w pracy [41] - dla przybliżenia hydrodynamicznego oraz w [121] - dla ośrodka sprężysto - plastycznego. Natomiast w pracy [122] omówiono próbę komputerowego modelowania procesu rozwoju niestablinośći przewężeniowych, tworząc zagęszczoną sieć pokrywającą pewien wycinek strumienia.
2. Wynik tego typu badań ma decydujące znaczenie przy ocenie głębokości przebicia konkretnych układów kumulacyjnych [2,22]. Nie wnikając szczegółowo w te problemy można powiedzieć, że zjawisko fragmentacji strumienia jest odpowiedzialne za istnienie optymalnej odległości wkładki od pancerza, zapewniającej maksymalną głębokość przebicia [14]. Gdyby zjawiska tego nie było, głębokość przebicia musiałaby ciągle wzrastać w miarę oddalania wkładki od pancerza.

4.3. Przebicie osłony ciałem odkształcalnym.

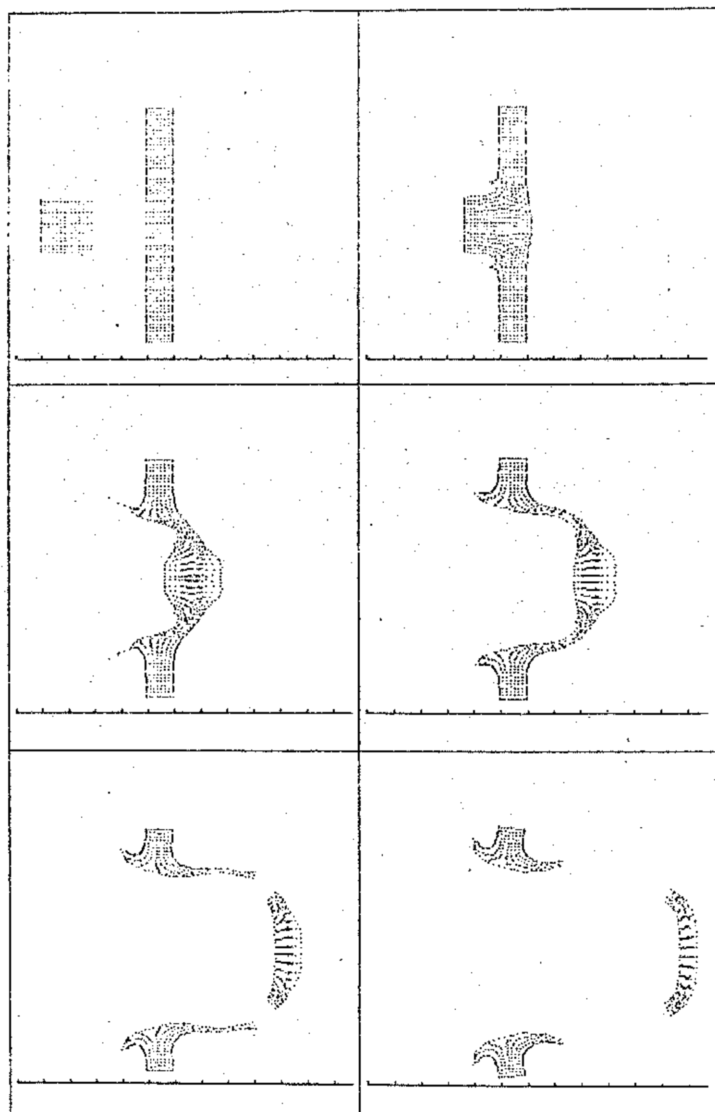
Globalnym sposobem oceny efektywności ładunków kumulacyjnych są parametry drążonych przez nie otworów w różnego rodzaju osłonach (pancerzach). Parametry te porównuje się dla różnych konstrukcji odnosząc je z reguły do średnicy ładunku kumulacyjnego. Przy przebijaniu osłon strumieniem kumulacyjnym takim podstawowym parametrem jest głębokość przebicia, a przy wykorzystaniu wybuchowo kształtowanych pocisków również średnica tworzonego krateru. Możliwość

teoretycznej oceny tych parametrów wymaga opanowania problematyki symulacji komputerowej procesów przebijania osłon ciałami odkształcalnymi. Problematyka ta nie stanowi jednak przedmiotu niniejszej pracy i nie będzie szerzej rozwijana. W rozdziale tym zostanie jedynie zademonstrowane, że opracowana metoda rozwiązywania problemów kumulacyjnych, może być z powodzeniem zastosowana również do badania efektów przebijania osłon. Stwarza to możliwość zbudowania w przyszłości kodów, które obejmowałyby jeszcze szerszy niż obecnie kompleks zagadnień od zainicjowania detonacji począwszy, a na przebiciu osłony skończywszy.

Na rys.42 pokazano przykład modelowania procesu przebicia miedzianej płytki o grubości 1 cm, miedzianym walcem o średnicy 2 cm i długości 2 cm, napędzonym do prędkości 2 km/s. Wybór miedzi na materiał zderzających się ciał wynikał oczywiście z faktu dobrej znajomości charakterystyk wytrzymałościowych dla tego metalu. Natomiast kształty i wymiary tych ciał przyjęto kierując się wyłącznie względami natury technicznej, gdyż opracowana metoda pozwala modelować zderzenia ciał o różnorodnych kształtach.

Na dwóch ostatnich kadrach rys.42 widoczna jest fragmentacja "powłoki" tworzącej się na granicach tarczy i uderzającego ciała. Zasady na jakich wykonywano te operacje są oczywiście takie same jak w poprzednich przykładach. Różnica polega tylko na tym, że w omawianym przykładzie, po wyeliminowaniu części "powłoki", dalsze obliczenia prowadzone są równolegle dla dwóch nieoddziaływujących z sobą obszarów - pozostałości po tarczy i uderzającym walcu. Zabieg taki nie był poprzednio wykonywany.

Porównanie pokazanych na rys.42 deformacji zderzających się ciał z przykładowymi rozwiązaniami literaturowymi (np.[61], [70]) wskazuje na niewątpliwą poprawność uzyskanego rozwiązania, przynajmniej od strony jakościowej. Głębsze analizy dotyczące zgodności ilościowej uzyskanych rozwiązań z teoretyczno - eksperymentalnymi doniesieniami literaturowymi



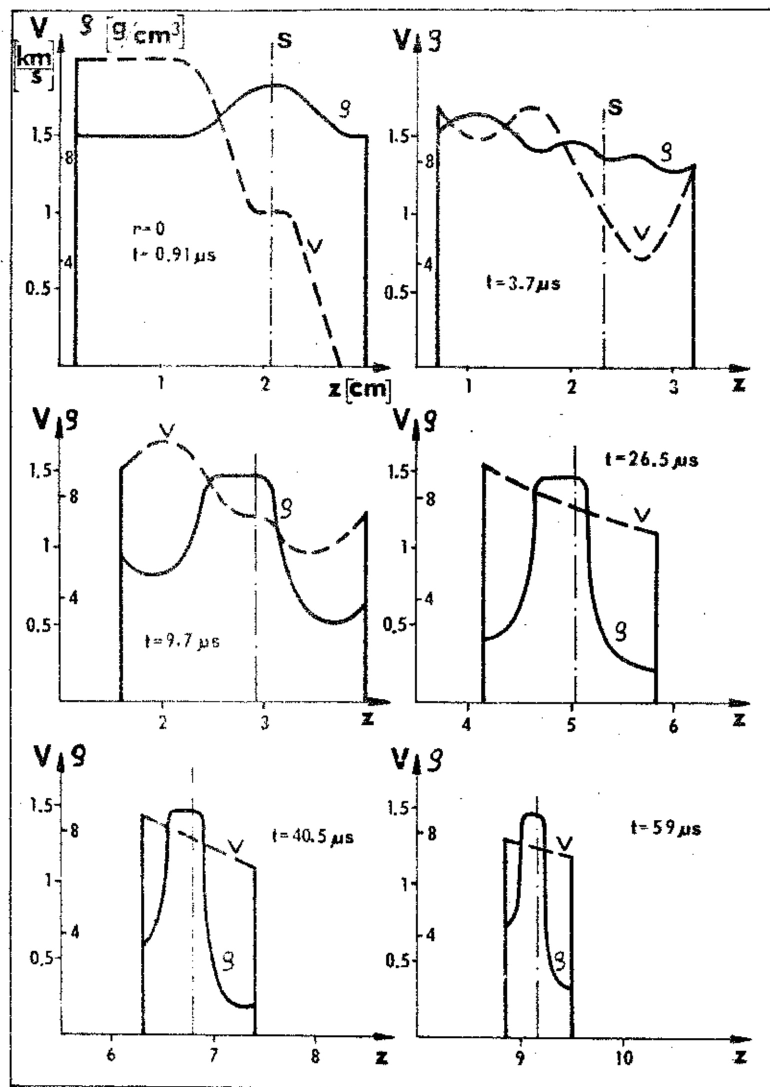
Rys. 42. Deformacje sieci numerycznej ilustrujące proces przebijania miedzianej tarczy, miedzianym walcem o prędkości 2 km/s. Odstęp czasowy między kadrami-13.6 µs.

nie będą przeprowadzane, gdyż przykład ten ma tylko demonstracyjny charakter. Tym niemniej wydaje się celowym sformułowanie kilku uwag dotyczących tego problemu.

Z wykresów zamieszczonych w pracy [123] można wnioskować, że średnica krateru w tym przykładzie powinna być około dwa razy większa od średnicy uderzającego walca. Tego rzędu średnica krateru jest widoczna na 3 i 4 kadrze rys. 42. Na dalszych kadrach widać jednak powolne zwiększanie się tej średnicy. Zasadniczą przyczyną tego zjawiska jest to, że tarcza ma stosunkowo małą średnicę i w wyniku przebicia pierścień jaki z niej pozostał zaczął w całości ekspandować radialnie.

Oprócz parametru jakim jest średnica krateru najwygodniejsze do interpretacji i porównań są parametry fali uderzeniowej i struktura obszaru powstającego w centrum zderzających się ciał. Na rys. 43 przedstawiono rozkłady gęstości ϱ i prędkości masowej v wzdłuż osi układu w kilku wybranych chwilach czasu.

Dla czasu t = 0.91 µs z zamieszczonych wykresów można odczytać parametry fali uderzeniowej rozprzestrzeniającej się w obu kierunkach osi "z" od oznaczonej literą S powierzchni kontaktu uderzającego walca z tarczą (przyjęto, że czas liczony jest od momentu zderzenia się ciał). Ponieważ uderzający walec miał prędkość 2 km/s to jest rzeczą oczywistą, że prędkość masowa fali uderzeniowej musi wynosić 1 km/s i taka też prędkość ustala się w otoczeniu powierzchni S. Z adiabaty uderzeniowej miedzi [2] można odczytać, że gęstość za frontem takiej fali powinna wynosić 10.9 g/cm^3 co również bardzo dobrze zgadza się z wartością zaznaczoną na wykresie. Parametry za frontami fal uderzeniowych są więc określane bardzo precyzyjnie. Pewne zdziwienie może natomiast budzić duża szerokość numerycznie modelowanego frontu fali uderzeniowej. Z rys. 42 widać, że tarczę podzielono zaledwie na 7 "komórek" wzdłuż osi, a typowe rozmycie frontu przez pseudolepkość wynosi od 3 do 5 komórek. Tłumaczy to tak duże rozmycie frontu fali uderzeniowej i jednocześnie jest cenną charakterystyką metody



Rys.43. Rozkłady gęstości średniej ϱ i prękości masowej v wzdłuż osi symetrii w wybranych chwilach czasu.

numerycznej, ktora mimo wprowadzenia zewnętrznej dyfuzji numerycznej nie rozmywa frontów falowych w stopniu większym niż inne metody wykorzystujące pseudolepkość. Oczywiście w obliczeniach o charakterze użytkowym należałoby w takim przypadku znacznie zagęścić sieci przestrzenne, aby zmniejszyć strefy rozmycia frontów falowych i tym samym zwiększyć dokładność metody obliczeniowej.

W chwili czasu t = 3.7 μs w tarczy propaguje się już fala odciążenia, a swobodna, zewnętrzna powierzchnia tarczy rusza z prędkością około 1.3 km/s. Wynik ten na pierwszy rzut oka wydaje się być wyraźnie zaniżony. Wiadomo bowiem, że w tym zakresie parametrów swobodne powierzchnie metali uzyskują prędkości bliskie podwojonej prędkości masowej fali uderzeniowej [2], a więc w naszym przypadku powinna to być prędkość około 2 km/s. Okazało się jednakże, że poosiowa prędkość masowa około 1 km/s występuje tylko w pewnym otoczeniu powierzchni zderzenia S. Fala uderzeniowa wygenerowana w otoczeniu tej powierzchni jest bowiem falą ekscentryczną i quasisferyczną, a więc jej parametry będą się obniżać w miarę oddalania się frontu od powierzchni S. W otoczeniu powierzchni swobodnej prędkość masowa na czole fali uderzeniowej spada skutkiem tego efektu do około 0.7 km/s i dlatego w fali odciążenia uzyskuje ona prędkość zaledwie 1.3 km/s. Analogicznie tylna, swobodna powierzchnia walca nie zostaje wyhamowana do prędkości 1 km/s ale jak widać z rys.43 do około 1.5 km/s. Dla ścisłości należy dodać że wyniki te mogą być obarczone pewnym błędem wynikającym ze zbyt dużej strefy rozmycia frontu fali uderzeniowej.

Z wykresów dla późniejszych chwil czasu widać, że od strony obu powierzchni swobodnych nastąpiło rozwarstwienie ośrodka. Wystąpiło ono jednak bardzo blisko tych powierzchni, co przy niedostatecznej gęstości sieci numerycznej objawiło się jedynie powstaniem obszarów o niskiej średniej gęstości, bez możliwości dokładnego rozpoznania ich struktury. W miarę upływu

czasu widać również stopniowy zanik procesów falowych i związane z tym wyrównywanie się rozkładów prędkości masowej.

Kończąc rozważania zawarte w tym rozdziale należy podkreślić, że zagadnienie przebijania osłon jest w ramach mechaniki ośrodków ciągłych jednym z najdłużej i najsilniej rozwijanych kierunków wykorzystujących metody symulacji komputerowych. W dalszym ciągu ukazuje się wiele prac z tej dziedziny, np. [45,124÷129,131], przy czym aktualnie zwraca się w nich uwagę głównie na doskonalenie i weryfikację opisów własności materiałowych.

Omówione przykładowe rozwiązanie dowodzi, że opracowana i opisana w pracy metoda symulacji komputerowej również nadaje się do badań tego typu problemów. Rozszerza to z jednej strony zakres metod komputerowych stosowanych w tej dziedzinie, a z drugiej strony umożliwia podjęcie w przyszłości kompleksowych badań problemów kumulacji i przebijania osłon, w ramach jednego matematyczno - fizyczno - numerycznego modelu.

Rozdział 5

WNIOSKI

W pracy zebrano i przedstawiono materiał dotyczący opracowanego i zweryfikowanego w praktyce sposobu komputerowego modelowania zjawisk kumulacyjnych. Na tle krótkiej charakterystyki tych zjawisk oraz aktualnego stanu wiedzy na ten temat omówiono komleksowo proces modelowania, poczynając od modelu matematyczno - fizycznego, poprzez budowę odpowiedniego kodu numerycznego, a kończąc na przykładach konkretnych rozwiązań. W rozdziale niniejszym zebrane zostaną najważniejsze wnioski wynikające z przedstawionej pracy. Mają one charakter pewnego podsumowania osiągniętych wyników i jednoczesnego wskazania działań, których podjęcie umożliwiłoby w przyszłości dalszy, krajowy rozwój tych badań o bardzo dużym znaczeniu praktycznym.

1. Głównym celem prowadzonych aktualnie eksperymentów w dziedzinie kumulacji jest budowa układów o bardzo wysokich parametrach i dużej skuteczności (głębokość przebicia, objętość krateru, itp.). Zbudowanie układów mogących sprostać współczesnym wymaganiom wyłącznie na drodze eksperymentalnej staje się stopniowo nierealne, zarówno ze względu na konieczną w takim przypadku, dużą liczbę eksperymentów jak i kłopoty z ich interpretacją. Pracom takim potrzebne jest więc silne i kompleksowo opisujące eksperyment wsparcie teoretyczne.

2. Na obecnym etapie prac eksperymentalnych takiego wsparcia nie może już dać im klasyczna teoria kumulacji. Zakres jej stosowalności powoduje bowiem, że nie znajduje ona zastosowania w badaniach procesów wybuchowego kształtowania i napędzania pocisków, a przy analizie

zjawisk tworzenia się strumieni kumulacyjnych jej zastosowanie wymaga uprzedniej znajomości parametrów napędzonej wkładki. Jest to oddzielny i znacznie trudniejszy problem niż samo zastosowanie prostych wzorów klasycznej teorii.

3. Od połowy lat 70-tych pojawiają się informacje literaturowe o próbach komputerowego modelowania procesów kumulacyjnych. W badaniach tego typu można uwzględniać niestacjonarność i wielowymiarowość przestrzenną zjawisk oraz realne warunki brzegowe i własności materiałów. Kierunek ten otwiera więc nowe, szerokie możliwości kompleksowego badania zjawisk fizycznych w całej ich złożoności.

4. Informacje literaturowe dotyczące problemów modelowania komputerowego zjawisk kumulacyjnych mają jednak charakter przykładowych i fragmentarycznych wyników dotyczących wybranych wariantów układów kumulacyjnych. Nie ma możliwości uogólnienia tych wyników, a więc i skorzystania z nich w celu wsparcia własnych prac eksperymentalnych. Dlatego też, aby wykorzystać wszystkie możliwości jakie stwarza modelowanie komputerowe, konieczne jest opanowanie określonych metod i posiadanie własnych kodów komputerowych, które umożliwiają na bieżąco dostęp do wszystkich interesujących nas informacji o badanym układzie.

5. W pracy przedstawiono własny, w znacznym stopniu oryginalny, matematyczno - fizyczno - numeryczny model opisujący procesy detonacji i dynamicznej deformacji ciał stałych, ze szczególnym uwzględnieniem zjawisk kumulacyjnych. Wykorzystując zjawiska "klasycznej" i "odwrotnej" kumulacji zweryfikowano ten model od strony jakościowej i ilościowej. Aktualnie osiągnięta zgodność

wyników teoretycznych i eksperymentalnych jest zupełnie wystarczająca z punktu widzenia prac doświadczalnych. Ogólnie można ją ocenić na dokładność rzędu kilku procent w zakresie wszystkich mierzonych parametrów.

6. Przedstawiona metoda daje szerokie możliwości modelowania złożonych zjawisk z dziedziny mechaniki ośrodków ciągłych, a w szczególności:
- zjawisk opisywanych równaniami gazodynamiki, hydrodynamiki, teorii sprężysto - plastyczności lub sprężysto/lepko - plastyczności,
- procesów niestacjonarych i dwuwymiarowych przestrzennie,
- warunki brzegowe mogą być stawiane na krzywoliniowych i ruchomych powierzchniach,
- rozwiązywane mogą być równocześnie sprzężone problemy opisywane równaniami gazodynamiki i mechaniki ciał stałych,
- możliwe jest modelowanie bardzo dużych deformacji ośrodka, łącznie z jego rozwarstwianiem się lub fragmentowaniem na niezależne części.

7. W ramach dotychczas prowadzonych prac, omówiona metoda symulacji komputerowej znalazła konkretne zastosowanie przy badaniach następujących zjawisk fizycznych:
- wybuchowe kształtowanie i napędzanie pocisków,
- tworzenie się strumienia kumulacyjnego,
- przebijanie osłon ciałami odkształcalnymi.

Pokazano przy tym, że metodę tę można z powodzeniem stosować do ładunków o charakterze przemysłowym (uwzględniając dodatkowo: realne relacje wymiarów, a zwłaszcza średnicy do grubości wkładki, osłony, nieosiowe inicjowanie detonacji, itp.).

8. Analiza dotychczas uzyskanych rezultatów wskazuje, że spośród zjawisk ogólnie scharakteryzowanych w punkcie 6,

w pierwszej kolejności można byłoby podjąć badania następujących problemów:

- analiza stabilności i fragmentacji strumieni kumulacyjnych,
- przebijanie osłon ciałami o nieregularnych kształtach (np. wybuchowo formowane pociski lub strumienie kumulacyjne), a w dalszej perspektywie połączenie zagadnień kumulacji i przebijania osłon,
- generacja supersilnych fal uderzeniowych w układach stożkowych lub walcowych,
- analiza procesów napędzania i stabilności koncentrycznych otoczek (linerów),
- wybuchowe łączenie metali,
- wybuchowe prasowanie proszków w układach wielowarstwowych.

9. Oryginalny charakter metody numerycznej stwarza szerokie możliwości dalszego jej udoskonalania i badania jej właściwości. Zwłaszcza, że jest ona źródłem szczególnie wielu problemów natury ideowej i technicznej, które można rozwiązywać na wiele sposobów. Najważniejsze z nich to:

- wybor punktów sąsiednich,
- eliminacja różnych typów niestabilności,
- dobor zewnętrznej dyfuzji numerycznej,
- metody obliczeń efektów lepko - plastycznego płynięcia i tworzenia się szczelin, itd.

Z punktu widzenia teorii metod różnicowych bardzo ciekawe mogłyby być pogłębione badania warunków stabilności omowionej metody, gdyż analiza przeprowadzona w pracy niniejszej miała tylko jakościowy charakter.

Należy również podkreślić, że opracowana metoda numeryczna jest całkowicie otwarta na modyfikacje matematyczno - fizycznego opisu zjawisk, w tym również na dalszą jego rozbudowę, w zależności od potrzeb, kierunku dalszych prac lub napływu nowych informacji literaturowych.

10. Równolegle z badaniem określonych zjawisk fizycznych prowadzone były prace zmierzające do określenia własności materiałowych badanych wkładek. W szczególności dotyczyły one ustalenia współczynników i zależności funkcyjnych opisujących efekty lepko/plastycznego płynięcia i tworzenia się szczelin wraz z określeniem ich wpływu na własności wytrzymałościowe.
Tego typu badania własne były niezbędne, gdyż doniesienia literaturowe na ten temat są nieliczne i znacznie zróżnicowane u różnych autorów. Należy liczyć sie z tym, że w dalszym ciągu będzie pojawiać się koniecznośc ich kontynuowania, zwłaszcza jeśli będzie się rozszerzał zakres prowadzonych prac.

11. Opracowana metoda numeryczna, podobnie jak metoda PIC, umożliwiać powinna względnie proste modelowanie deformacji ośrodków wielofazowych. Sprawdzenie i potwierdzenie tych możliwości stworzyłoby szansę na podjęcie badań przebijania pancerzy o konstrukcji warstwowej lub generacji strumieni kumulacyjnych z wykorzystaniem wkładek bimetalicznych.

12. Modelowanie komputerowe zjawisk fizycznych może być skutecznym narzędziem wspierającym prace eksperymentalne. Jednocześnie jest ono w znacznym stopniu od tych prac zależne i to z dwóch co najmniej powodów. Wyniki eksperymentalne są bowiem podstawą jakościowej i ilościowej weryfikacji uzyskiwanych rozwiązań oraz dają możliwość wyznaczenia charakterystyk materiałowych niedostępnych w literaturze.
W badaniach zjawisk kumulacyjnych szczególnie przydatne są dwa rodzaje diagnostyk: fotografia w świetle widzialnym i fotografia rentgenowska. Dotychczasowe prace teoretyczne były konfrontowane tylko z fotografiami wykonanymi w świetle widzialnym. Dalszy postęp tych prac będzie zależny

w dużym stopniu od rozwoju diagnostyki rentgenowskiej, mogącej dostarczyć bardziej szczegółowych informacji o badanych zjawiskach. Diagnostyka ta jest stosowana i doskonalona w liczących się w świecie ośrodkach badawczych zajmujących się zbliżoną problematyką [132].
Natomiast do badań własności dynamicznie deformowanych materiałów coraz częściej wykorzystuje się metody interferometryczne. Umożliwiają one wykonanie bardzo precyzyjnych pomiarów prędkości powierzchni swobodnych deformowanych i napędzanych ciał. Uzyskane w ten sposób wyniki są konfrontowane z wynikami symulacji komputerowej, umożliwiając wyznaczenie poszukiwanych charakterystyk materiałowych. Eksperymenty wykonuje się przy tym w taki sposób, aby przy ich interpretacji mogły być wykorzystywane jednowymiarowe kody numeryczne. Daje to możliwość przeprowadzenia dużej liczby testów komputerowych w stosunkowo krótkim czasie, a więc czyni proces określania własności materiałów szybkim i efektywnym. Metoda interferometryczna (wraz z odpowiednim testowym kodem numerycznym) powinna również jak najczęściej wzbogacić zestaw diagnostyk stosowanych w badaniach krałowych.

LITERATURA.

1. М.А.Лаврентьев, Кумулятивный заряд и принципы его работы, УМН, 1957, 12, 4.
2. Ф.А.Баум, Л.П.Орленко, К.П.Станюкович, В.П.Чельшев, Б.И.Шехтер, Физика взрыва, Москва, изд."Наука", 1975.
3. K.Jach, E.Włodarczyk, Numeryczna symulacja wielowymiarowych problemów kumulacji i napędzania ciał odkształcalnych, Biul. WAT, 1985, 34, 6.
   Numerical simulation of multidimensional cumulation and driving problems of deformable bodies, J.Tech.Phys., 1986,27, 1-2.
4. G.Birkhoff, D.MacDougall, E.Pugt, G.Taylor, Explosives with lined cavities, J.Appl.Phys., 1948, 19, 6.
5. Г.И.Покровский, Боевое применение направленного взрыва, Воениздат, Москва, 1944.
6. F.A.Korolev, G.J.Pokrovsky, Directional effect of explosion studies by optical method, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de l'URSS, 1944, 27, 6.
7. Г.Биркгоф, Гидродинамика, ИЛ, 1954.
8. J.Clark, Flash radiography applied to ordnance problems, J.Appl. Phys., 1949, 20.
9. S.Sampooran, Note on the length of high velocity "Munroe" jets, Proc.Nat.Inst.Sci., India, 1953, 19.
10. J.M.Walsh, R.G.Shreffler, F.J.Willig, Limiting conditions for jet formation in high velocity collisions, J.Appl.Phys., 1953, 24, 3.
11. W.S.Koski, F.A.Lucy, R.G.Shreffler, F.J.Willig, Fast jets from collapsing cylinders, J.Appl.Phys., 1952, 23, 12.
12. High-speed Physics, vol II, Ed.von K.Vollrath and G.Thomer, Wien, New York, 1967.
13. G.R.Cowan, A.H.Holtzman, Flow configurations in colliding plates: explosive bonding, J.Appl.Phys., 1963, 34, 4.

14. Р. Шаль, в книге: Физика быстропротекающих процессов, Москва, "Мир", 1971.
15. Н.А.Златин, О предельных скоростях сплошной конденсированной кумулятивной струи, в сб.: Проблемы математики и механики, Новосибирск, "Наука", 1983.
16. С.К.Годунов, А.А.Дерибас, В.И.Мали, О влиянии вязкости материала на процесс образования струй при соударениях металлических пластин, ФГВ, 1975, 11, 1.
17. А.А.Дерибас, И.Д.Захаренко, О поверхносных эффектах при косых соударениях металлических пластин, ФГВ, 1974, 10, 3.
18. R.J.Eichelberger, E.Pugh, Experimental verification of the theory of jet formation by charges with lined conical cavities, J.Appl.Phys., 1952, 23, 5.
19. M.A.Cook, Mechanism of cratering in ultra-high velocity impact, J.Appl.Phys., 1959, 30, 5.
20. Л.В.Беляков, Ф.Ф.Витман, Н.А.Златин, О процессе соударения деформируемых тел и его моделировании, ЖЭТФ, 1964, 34, 10.
21. А.Я.Сагомонян, Проникание, Москва, изд.МГУ, 1974.
22. С.А.Кинеловский, Ю.А.Тришин, Физические аспекты кумуляции, ФГВ, 1980, 16, 5.
23. М.В.Рубцов, Об измерении скорости кумулятивной струи, ФГВ, 1977, 13, 6.
24. P.Ch.Chou, J.Corleone, R.R.Karpp, Criteria for jet formation from impinging shells and plates, J.Appl.Phys.,1976, 47, 7.
25. N.Legrand, J.Ovadia, Calcul d'econlements engendres par explosif, dans les milieux inertes en moyen du code C.E.E.,Behaviour of dense media under high dynamic pressures, symposium H.D.P., Paris, 1978.
26. M.van Thiel, J.Levatin, Jet formation experiments and computations with a Lagrange code, J.Appl.Phys., 1980, 51, 12.
27. A.De Rouvray, F.Arnaudeau, J.Dupois, J.F.Chedmail, E.Hang, Structural impact and Crashworthiness, Davies lectures, 1984, 1.

28. К.Ях, Численное моделирование явлений классической и обратной кумуляции, ПМТФ, 1987, 2.
29. Л.А.Мержиевский, А.Д.Ресянский, В.М.Титов, Прочностные эффекты в обратной кумуляции, ДАН СССР, 1986, 290, 6.
30. К.И.Заппаров, В.Н.Кукуджанов, Упругопластическое деформирование металлической облицовки кумулятивного заряда, Прикладные Проблемы Прочности и Пластичности, Москва, 1985.
31. Л.В.Ефремова, А.И.Корнеев, В.Г.Трушков, Численное моделирование процесса дефомации конической облицовки, ФГВ, 1987, 23, 2.
32. Л.А.Мержиевский, А.Д.Ресянский, Численное моделирование деформирования и разрушения пологой конической облицовки,ФГВ, 1987, 23, 2.
33. J.W.Herman, G.Randers - Pehrson, E.R.Berns, Experimental and analytic investigations of self-forging fragments for the defeat of armor at extremely long standoff, Proceedings of the Third International Symposium on Ballistics, Karlsruhe, Germany, 1977.
34. B.Arvidson, T.Bakowsky, R.E.Brown, 8-th Intern.Conf. on High Energy Rate Fabrication, San Antonio, USA, 1984.
35. А.М.Гладышев, Г.А.Сапожников, В.М.Фомин, в книге: Численные методы решения задач теории упругости и пластичности, Новосибирск, 1984.
36. G.R.Johnson, Dynamic analysis of explosive-metal interaction in three dimensions, J.Appl.Mech.,1981, 48, 3.
37. K.Jach, Numerical modelling of two-dimensional elastic/visco-plastic deformation of materials at dynamic loads, 11-th AIRAPT Int. Conf., Kiev, July 12 to 17, 1987.
38. H.Derentowicz, Z.Jopek, E.Włodarczyk, Raport wewnętrzny WAT-IFPiLM, 1982, niepublikowany.
39. Z.Jopek, J.Szymański, E.Włodarczyk, Nowe generacje amunicji przeciwpancernej, WPT, 1988, 3.
40. С.К.Годунов, А.А.Дерибас, И.Д.Захаренко, Исследование вязкости металлов при высокоскоростных соударениях, ФГВ, 1981, 17, 1.

41. А.Н.Дрёмин, Ю.А.Гордополов, И.В.Молоков, Модифицированная гидродинамическая модель поведения металла в условиях высокоскоростного удара, VI International Symposium use of explosive energy in manufacturing metallic materials of new properties, Gottwaldov, 1985.
42. L.Seaman, D.R.Curran, D.A.Shockey, Computational models for ductile and brittle fracture, J.Appl.Phys., 1976, 47, 11.
43. J.N.Johnson, Dynamic fracture and spallation in ductile solids, J.Appl.Phys., 1981, 52, 4.
44. С.Г.Сугак, Г.И.Канель, В.Е.Фортов, А.Л.Ни, В.Г.Стельмах, Численное моделирование действия взрыва на железную плиту, ФГВ, 1983, 19, 2.
45. В.А.Агурейхин, С.И.Анисимов, А.В.Бушман, Г.И.Канель, В.П.Карягин, А.Б.Константинов, Б.П.Крюков, В.Ф.Минин, С.В.Разоренов, Р.З.Сагдеев, С.Г.Сугак, В.Е.Фортов, Теплофизические и газодинамические проблемы противометеоритной защиты космического аппарата "Вега", Теплофизика Высоких Температур, 1984, 22, 5.
46. А.А.Дерибас, И.Д.Захаренко, В.М.Фомин, Э.М.Хакимов, Плоское соударение металлических пластин равной толщины, ФГВ, 1983, 19, 5.
47. Д.Дж.Ричардсон, Метод характеристик для решения уравнений гидродинамики двумерных неустановившихся течений, в сб.: Вычислительные методы в гидродинамике, Москва, "Мир", 1967.
48. K.Jach, Propagacja kumulacyjnych fal uderzeniowych w układach stożkowych, rozprawa doktorska, Warszawa, WAT, 1977.
49. В.Ф.Дьяченко, Метод свободных точек, в кн.: Метод крупных частиц в газовой динамике, Москва, "Наука", 1982.
50. В.Ф.Дьяченко, Е.С.Имшенник, Двумерная магнитогидродинамическая модель плазменного фокуса, в сб.: Вопросы теории плазмы, Москва, 1974, 8.

51. J.Chłodziński, S.Denus, A.Dubik, A.Gałkowski, K.Jach, J.Marczak, J.Owsik, A.Sarzyński, Influence of temporal and energetic laser-pulse charakteristics upon the parameters of shock waves generated in plexiglas, J.Techn.Phys., 1980, 21, 4.
52. K.Jach, K.Gac, Wpływ transportu promieniowania i przewodnictwa cieplnego na efektywność reakcji syntezy w wybuchowych układach kompresji plazmy typu "szybki liner - rdzeń D-T", Biul.WAT, 1983, 32, 1.
The influence of radiation transport and heat conduction on the efficacy of the reaction of synthesis in "rapid liner - D-T core" explosive systems for plasma compression, J.Techn.Phys., 1984, 25, 2.
53. H.Derentowicz, K.Gac, K.Jach, E.Włodarczyk, O możliwościach inicjacji lawinowej reakcji syntezy termojądrowej w wybuchowych układach sferycznych. Część I - układy jednolinerowe, Biul.WAT, 1984, 33, 4.
Some possibilities of initiating a avalanche reaction of termonuclear fusion in spherical explosive systems. Part I - single liner systems, J.Techn.Phys., 1984, 25, 3-4.
54. H.Derentowicz, K.Gac, K.Jach, E.Włodarczyk, O możliwościach inicjacji lawinowej reakcji syntezy termojądrowej w wybuchowych układach sferycznych. Część II - układy dwulinerowe, Biul.WAT, 1984, 33, 7.
On the possibility of initiating an avalanche reaction of thermonuclear fusion in an explosion driven spherical system. Part II - two-liner systems, J.Techn.Phys., 1985, 26, 2.
55. М.Л.Уилкинс, Расчёт упруго-пластических течений, в сб.: Вычислительные методы в гидродинамике, Москва, "Мир", 1967.
56. Ү.Д.Шульц, Двумерные конечно-разностные гидродинамические уравнения в переменных Лагранжа, в сб.: Вычислительные методы в гидродинамике, Москва, "Мир", 1967.
57. Р.Рихтмайер, К.Мортон, Разностные методы решения краевых задач, Москва, "Мир", 1972.

58. Ф.Х.Харлоу, Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики, в сб.: Вычислительные методы в гидродинамике, Москва, "Мир", 1967.
59. Р.М.Франк, Р.Б.Лазарус, Смешанный метод использующий переменные Эйлера и Лагранжа, в сб.: Вычислительные методы в гидродинамике, Москва, "Мир", 1967.
60. В.Ф.Нох, СЭЛ - Совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач, в сб.: Вычислительные методы в гидродинамике, Москва, "Мир", 1967.
61. Д.Поттер, Вычислительные методы в физике, Москва, "Мир", 1975.
62. А.А. Самарский, Теория разностных схем, Москва, "Наука", 1983.
63. Б.Л.Рождественский, Н.Н.Яненко, Системы квазилинейных уравнений, Москва, "Наука", 1978.
64. А.А.Самарский, Ю.П.Попов, Разностные методы решения задач газовой динамики, Москва, "Наука", 1980.
65. Э.Джеймсон, Т.Мюллер, Y.Боллхауз, В.Краус, В.Шмидт, О.Белоцерковский, Численные методы в динамике жидкости, Москва, "Мир", 1981.
66. В.М.Ковеня, Н.Н.Яненко, Метод расщепления в задачах газовой динамики, Новосибирск, "Наука", 1981
67. О.М.Белоцерковский, Ю.М.Давыдов, Метод крупных частиц в газовой динамике, Москва, "Наука", 1982.
68. О.М.Белоцерковский, Численное моделирование в механике сплошных сред, Москва, "Наука", 1984.
69. Ч.Мейдер, Численное моделирование детонации, Москва, "Мир", 1985.
70. Высокоскоростные ударные явления, Москва, "Мир", 1973.
71. H.Derentowicz, Wytwarzanie wysokich obciążeń materii metodami wybuchowej kumulacji energii, Biul.WAT, 1986, 35,6.
72. K.Jach, O możliwościach zastosowania metody typu "cząstek swobodnych" do analizy problemu propagacji fal Macha w układach walcowych. Oprac.wewn. IFPiLM, 198., 3, 1.

73. W.Babul, S.Zięba, Materiały wybuchowe w technologicznych procesach obróbki tworzyw, Warszawa, 1972.
74. H.Nowak, D.Smoleński, Ładunki kumulacyjne w wojsku, przemyśle i górnictwie, Warszawa, 1974.
75. E.Włodarczyk, A.Wiśniewski, O propagacji frontu fali bocznego rozprężania gazowych produktów detonacji w ładunku kumulacyjnym, Biul.WAT, 1981, 30, 8.
76. E.Włodarczyk, A.Wiśniewski, Oddziaływanie przesłony ładunku kumulacyjnego na propagację frontu fali bocznego rozprężania gazowych produktów wybuchu (GPD), Biul. WAT, 1981, 30, 9. The influence of the diaphragm of a cumulation charge on the propagation of the lateral expansion wave of gaseous detonation products, J.Techn. Phys., 1982, 23, 2.
77. Н.А.Слезкин, Об ударе плоской газовой струи в безграничную стенку, ПММ, 1952, 16, 2.
78. М.В.Рубцов, О соударении плоских струй псевдопластической жидкости со свободной границей, ПМТФ, 1983, 6.
79. S.Kaliski, E.Włodarczyk, Wpływ parametrów równania stanu na charakterystyki regularnego odbicia skośnych fal uderzeniowych, Biul.WAT, 1973, 22, 9.
80. А.А.Ильюшин, П.М.Огибалов, Упругопластические деформации полых цилиндров, Москва, изд.МГУ, 1960.
81. Н.И.Матюшкин, Ю.А.Тришин, О некоторых эффектах возникающих при взрывном обжатии вязкой цилиндрической оболочки, ПМТФ, 1978, 3.
82. Н.П.Новиков, О высокоскоростных кумулятивных струях, ПМТФ, 1962, 6.
83. Н.П.Новиков, О некоторых свойствах высокоскоростных кумулятивных струй, ПМТФ, 1963, 1.
84. В.М.Титов, Возможные режимы гидродинамической кумуляции при схлопывании облицовки, ДАН СССР, 1979, 247, 5.
85. Н.Н.Горшков, Применение гидродинамической теории для описания формирования струи при "обратной" кумуляции, ФГВ, 1983, 19, 2.

86. W.Flume, Artilleriemunition: Bessere Wirkung in Ziel, Wehrtechnik. 1985, 10.

87. S.A.Schröder, U.Fornemann, K.Weiman, Projektilbildende Ladungen, Wehrtecanik, 1986, 16.

88. M.L.Wilkins, Mechanics of penetration and perforation, Intern.J. of Eng.Sci., 1978, 16, 11.

89. Н.Н.Яненко, Н.Н.Анучина, В.Е.Петренко, Ю.И.Шокин, О методах расчета задач газовой динамики с большими деформациями, в сб.: Численные методы механики сплошной среды, Новосибирск, 1970, 1, 1.

90. Численные методы решения задач теории упругости и пластичности, VI Всесоюзная конференция, Новосибирск, 1980.

91. J.Tyl, E.Włodarczyk, Równania stanu produktów detonacji (PD) i materiałów wybuchowych (MW).
Równania makrokinetyki. (Synteza danych literaturowych). Biul.WAT, 1985, 34,4.

92. Н.И.Белов, А.И.Корнеев, А.П.Николаев, Численный анализ разрушения в плитах при действии импульсных нагрузок, ПМТФ, 1985, 3.

93. P.Perzyna, Teoria lepkoplastyczności, Warszawa, PWN, 1966.

94. W.K.Nowacki, Zagadnienia falowe w teorii plastyczności, Warszawa, PWN, 1974.

95. E.Włodarczyk, Mechanika techniczna tom III, Fale plastyczne, Warszawa, PWN, 1986.

96. J.Skrzypek, Plastyczność i pełzanie, Warszawa, PWN, 1986.

97. J.Ostrowska-Maciejewska, Podstawy mechaniki ośrodków ciągłych, Warszawa, PWN, 1982.

98. Л.М.Качанов, Основы теории пластичности, Москва, "Наука", 1969.

99. Д.Д.Ивлев, Г.И.Быковцев, Теория упрочняющегося пластического тела, Москва, "Наука", 1971.

100. M.L.Wilkins, Modelling the behaviour of materials, Structural impact and crashworthines, London and New York, 1984, 2.

101. M.M.Carrol, K.T.Kim, V.F.Nesterenko, The effect of temperature on viscoplastic pore collapse, J.Appl.Phys., 1986, 59, 6.

102. В.З.Партон, Б.Г.Борисковский, Динамическая механика разрушения, Москва, "Машиностроение", 1985.

103. В.И.Владимиров, Физическая природа разрушения металлов, Москва, "Металлургия", 1984.

104. В.С.Никифоровский, Е.И.Шемякин, Динамическое разрушение твердых тел, Новосибирск, "Наука", 1979.

105. В.З.Партон, Е.М.Морозов, Механика упругопластического разрушения, Москва, "Наука", 1985.

106. Математические методы механики деформируемого твердого тела, Сборник из серии - Прочность и вязко-упругопластичность, Москва, "Наука", 1986.

107. В.В.Федоров, Кинетика повреждаемости и разрушения твердых тел, Ташкент, "Фан", 1985.

108. Механическая усталость металлов, Материалы VI Международного коллохвиума, Киев, "Наукова думка", 1983.

109. Д.Р.Курран, Л.Симен, Д.А.Шоки, Микроструктура и динамика разрушения, в сб.: Ударные волны и явления высокоскоростной деформации металлов, Москва, "Металлургия", 1984.

110. Д.Р.Курран, Динамическое разрушение, в сб.:Динамика удара, Москва, "Мир", 1985.

111. G.Luttwak, Y.Kivity, A.Abester, Effects of a hypervelocity jet on a layered target, Int.J.Engng., 1982, 20, 8.

112. Ш.У.Галиев, Модель хавитационного динамического разрушения твердых вязкопластических и жидких сред, Проблемы Прочности, 1968, 10.

113. Н.Х.Ахмадеев, Р.И.Нигматулин, Моделирование откольного разрушения при ударном деформировании. Анализ схемы мгновенного откола, ПМТФ, 1981, 3.

114. M.A.Nash, I.G.Cullis, Numerical modelling of fracture a model f ductile fracture in triaxial states of stress. Third Conference on the Mechanical Properties of Materials at High Rates of Strain, Oxford, 9-12 April, 1984.

115. С.В.Разоренов, Г.И.Канель, В.Е.Фортов, Измерение ширины фронта ударной волны в меди, ЖТФ, 1985, 55, 9.
116. В.К.Голубев, О расширении пор в пластических металлах при отколе, ПМТФ, 1983, 6.
117. L.C.Chhabildas, J.R.Asay, Rise - time measurements of shock transitions in aluminium, copper and steel, J.Appl.Phys., 1979, 50, 4.
118. А.Г.Иванов, В.Н.Минеев, О масштабных эффектах при разрушении, ФГВ, 1979, 15, 5.
119. A.Kumar, R.G.Kumble, Viscous grad on dislocations at high strain rates in copper, J.Appl.Phys., 1969, 40, 9.
120. Э.Э.Шпильрайн, В.А.Фомин, С.Н.Сковородко, Г.Ф.Сокол, Исследование вязкости жидких металлов, Москва, "Наука", 1983.
121. J.P.Curtis, Axisymmetric instability model for shaped charge jets, J.Appl.Phys., 1987, 61, 11.
122. P.Ch.Chou, J.Corleone, The stability of shaped -charge jets, J.Appl.Phys., 1977, 48, 10.
123. Х.Ф.Свифт, Механика соударения со сберхвысохими скоростями, в сб.: Динамика удара, Москва, "Мир", 1985.
124. J.J.Misey, Analysis of long rod penetration at hypervelocity impact, AIAA Journal, 1977, 15, 12.
125. В.Н.Кукуджанов, Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред, Успехи механики, 1985, 8, 4.
126. В.В.Астанин, Ш.Y.Галиев, К.Б.Иващенко, Численно-экспериментальное исследование упругопластического взаимодействия ударника с преградой, Проблемы Прочности, 1987, 221, 11.
127. P.Calleja, C.Terras, R.Dormeval, J.P.Ansart, Essai de Taylor sur de l'aluminium, du cuivre et de L'acier inoxydable, Journal de Physique, 1985, 46, 8.
128. P.H.Pidsley, A numerical study of long rod impact on to a large target, J.Mech.Phys.Solids, 1984, 32, 4.

129. K.S.Holian, Hydrocode simulations of hypervelocity impacts, Los Alamos National Laboratory Report, 1987, in print.
130. W.H.Lee, D.Kwak, Pic method for a two-dimensional elastic-plastic-hydro code, Computer Physics Communications, 1988, 4.
131. E.Bottet, D.Pirotais, Introduction d'un modele de comportement elastoplastique dans le code eulerian instationnaire CEE, Sciences et techniques de l'armement, Paris, 1987, 61, 4.
132. F.Jamet, G.Thomer, Flash radiography, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1976.

534.222.2.001.5 539.3 519.688	Mechanika.Detonacja.Badanie.Modelowanie. Mechanika ciał stałych. Odkształcenia. Matematyka komputerowa.Algorytmy.	WAT Pol.

Jach K.: Modelowanie komputerowe zjawisk kumulacyjnych
Warszawa: WAT 1990, 179s.rys.tab.bibliogr. poz.132

W pracy przedstawiono kompleksowy fizyczno-matematyczno-numeryczny model służący do opisu dużych,dynamicznych deformacji metali, detonacji materiałów wybuchowych oraz oddziaływania produktów detonacji na ciała stałe. Podstawowymi zjawiskami do opisu których zastosowano ten model była tzw.klasyczna lub "odwrotna" kumulacja oraz dodatkowo efekt przebijania osłony ciałem odkształcalnym. Praca zawiera kompleksowy opis oraz przykładowe rozwiązania powyższych problemów (z wykorzystaniem aktualnej wiedzy o własnościach dynamicznie deformowanych materiałów i własnych badań teoretyczno-eksperymentalnych). Rozwiązania teoretyczne skonfrontowano z wynikami eksperymentów wykazując ich zgodność w stopniu całkowicie wystarczającym dla praktycznych zastosowań modelu. Przeprowadzono pomyślnie zakończone próby bezpośredniej adaptacji modelu do optymalizacji ładunków kumulacyjnych o charakterze przemysłowym.
Model fizyczno-matematyczny oparty jest na równaniach teorii lepkoplastyczności w sformułowaniu Hohenemsera-Pragera i uzupełniony o półempiryczne równania stanu oraz zależności opisujące zmiany dynamicznej granicy plastycznego płynięcia,modułu ścinania i współczynnika lepkości w funkcji temperatury, ciśnienia, gęstości i deformacji plastycznej (model Steinberga). Ponadto w obszarach niszczenia struktury metali korzystano z fenomenologicznego modelu opisującego powstawanie i wzrost objętości szczelin oraz ich wpływ na charakterystyki wytrzymałościowe.
Przykładowe rozwiązania prezentowane w pracy oraz dane liczbowe wynikające z własnych badań dotyczą wkładek kumulacyjnych wykonanych z miedzi - podstawowego do chwili obecnej materiału konstrukcyjnego w tej dziedzinie.
Procesy detonacji opisano klasycznymi równaniami gazodynamiki oraz półempirycznymi równaniami stanu. Front fali detonacyjnej aproksymowano powierzchnią silnej nieciągłości.
Od strony matematycznej model jest zespołem kilkunastu nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych w trzech zmiennych niezależnych (czas i dwa wymiary przestrzenne) uzupełnionych związkami algebraicznymi opisującymi własności materiałów oraz odpowiednimi warunkami początkowo-brzegowymi.
Dla rozwiązania tak sformułowanego problemu zaproponowano, przebadano i opisano w pracy oryginalny algorytm symulacji komputerowej typu "punktów swobodnych". Umożliwia on rozwiązywanie szerokiej klasy problemów z zakresu mechaniki ośrodków ciągłych, gdyż pozwala na: prowadzenie obliczeń w warunkach skrajnie dużych deformacji (łącznie z fragmentacją), stawianie warunków brzegowych na ruchomych i krzywoliniowych powierzchniach. zszywanie rozwiązań na kontakcie metal-ciało stałe, korzystanie z różnych modeli opisujących własności ciał stałych, cieczy, gazów, produktów detonacji itd.

